Μονοδιαστατα Προβληματα

Διδακτικοι Στοχοι

- Να μελετήσετε τρία μονοδιάστατα κβαντομηχανικά συστήματα.
- Για καθένα από αυτά να γνωρίζετε και να μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις ενεργειακές τους στάθμες.
- Να κατανοήσετε την αρχή λειτουργίας του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου.

Αντιστοιχιση Στις Ενοτητες των Προτεινομενων Βιβλιων

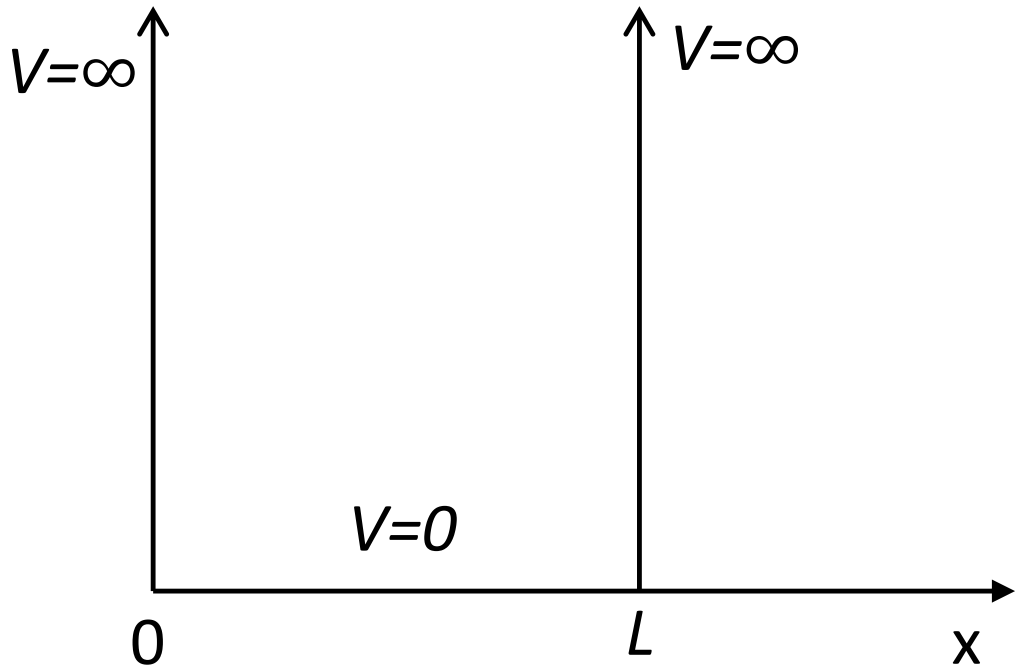
- Από το βιβλίο του J. Newman «Φυσική της Ζωής» την §24.2, §24.3, §24.4, §23.3.
- Από το βιβλίο των Freeman/Ruskell/Kesten/Tauck §26.2.

ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Έστω ένα σωματίδιο που είναι παγιδευμένο σε ένα (μονοδιάστατο) κουτί μήκους L.

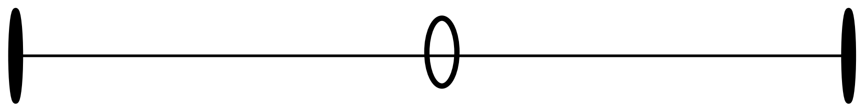


ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Ουσιαστικά πρόκειται για ένα σωματίδιο (π.χ. e^-) που είναι παγιδευμένο σε ένα πηγάδι και ανακλάται τελείως ελαστικά κάθε φορά που προσπίπτει στα τοιχώματα. Αυτό έχει ως συνέπεια να διατηρείται η ενέργεια του.

ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Ένα κλασικό ανάλογο είναι να θεωρήσετε ότι μια χάντρα είναι περασμένη σε ένα οριζόντιο λείο σύρμα μήκους L που στα δύο άκρα του έχει δύο εμπόδια που δεν αφήνουν τη χάντρα να ξεφύγει.



ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται (επιλύοντος την εξ. Schrödinger) ότι:

  α) Η (κινητική) ενέργεια του σωματιδίου είναι ΚΒΑΝΤΙΣΜΕΝΗ και παίρνει τις τιμές

$$\boxed{E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} \cdot n^2 \quad n = 1,2,3 \ldots}$$

ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

β) Η χαμηλότερη τιμή ενέργειας ΔΕΝ είναι η $E_n = 0$ αφού $n \neq 0$. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται ενέργεια μηδενικού σημείου.

γ) Από την εξίσωση $E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} \cdot n^2$ παρατηρούμε ότι όταν m ή L πολύ μεγάλα, τότε τα διαδοχικά ενεργειακά επίπεδα θα απέχουν πολύ λίγο μεταξύ τους.

ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Πρόκειται για τις περιπτώσεις ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ή σωματιδίων ΕΓΚΛΕΙΣΜΕΝΑ ΣΕ ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΑ ΚΟΥΤΙΑ οπότε τα κβαντικά φαινόμενα είναι αμελητέα και τα συστήματα περιγράφονται με κλασικούς όρους.

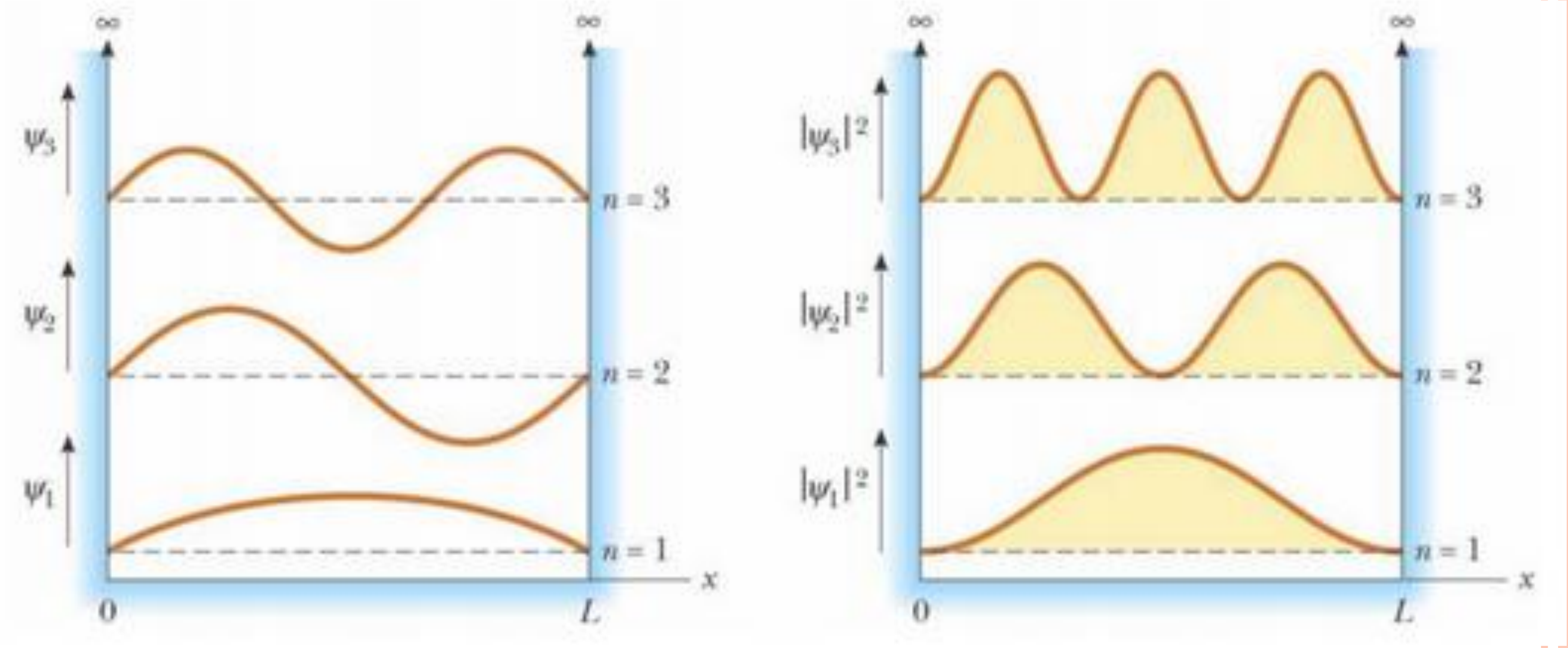
ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

δ) Οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν το σωματίδιο, όταν αυτό έχει ενέργεια $E_{n,}$ είναι οι

$$\boxed{\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad n = 1,2,3 \ldots}$$

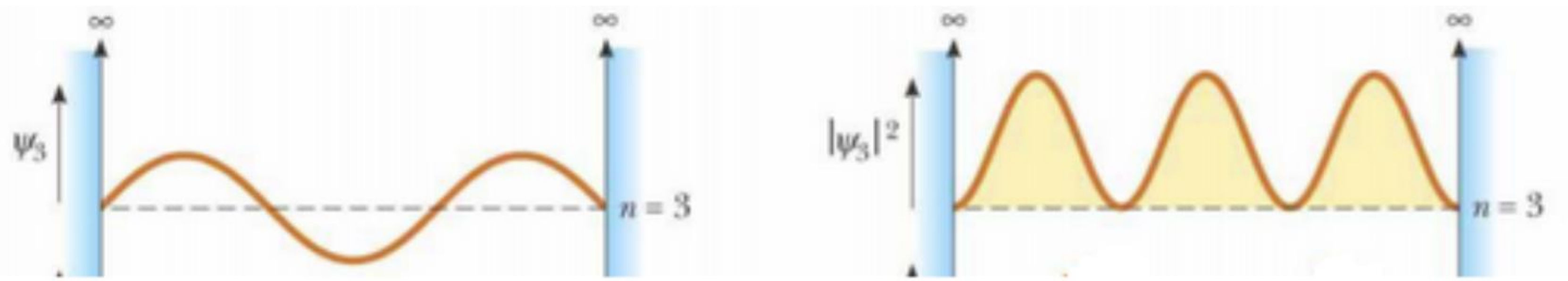
ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Σχηματικά για τις πρώτες κυματοσυναρτήσεις έχουμε



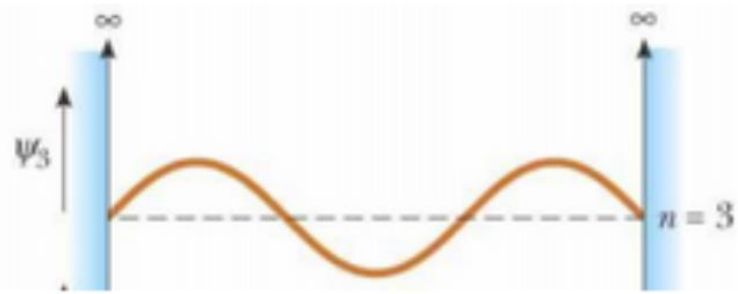
ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

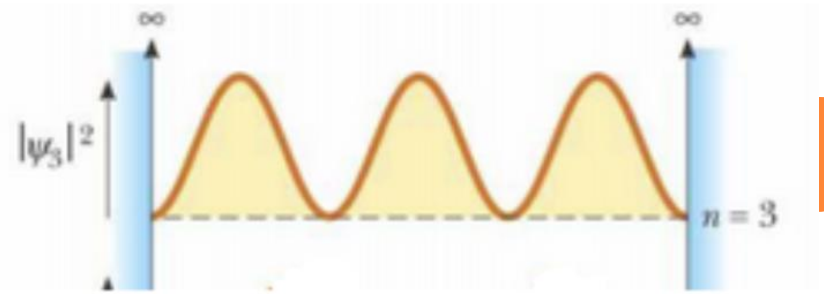
- Μπορούμε να σχεδιάζουμε αυτές τις κυματοσυναρτήσεις καθώς μοιάζουν με στάσιμα κύματα σε χορδή.
- Η συνάρτηση ψ παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές αλλά η συνάρτηση $|\psi|^2$ που δίνει την πιθανότητα είναι



ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο ΔΕΝ είναι παντού η ίδια όπως αναμέναμε κλασικά.
- Υπάρχουν θέσεις με μηδενική πιθανότητα και με μέγιστη πιθανότητα.





ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΒΑΘΟ ΠΗΓΑΔΙ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ (ΚΟΥΤΙ)

- Οι κυματοσυναρτήσεις εξελίσσονται χρονικά, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με τη χρονική τους εξέλιξη.

Σωματίδιο σε κουτί: Οι Πληθυσμοί

- Με βάση την κατανομή Boltzmann, το πλήθος των μορίων N_n που θα έχουν ενέργεια λόγω περιστροφής ίση με E_n, σε σχέση με το πλήθος των μορίων N_1 που θα έχουν την μικρότερη ενέργεια $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$, θα είναι

$$N_n = N_1 e^{-(E_n - E_1)/k_B T} \xRightarrow{\frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} n^2}$$

$$\Rightarrow N_n = N_1 e^{-(n^2-1)\frac{h^2}{8mL^2 k_B T}}$$

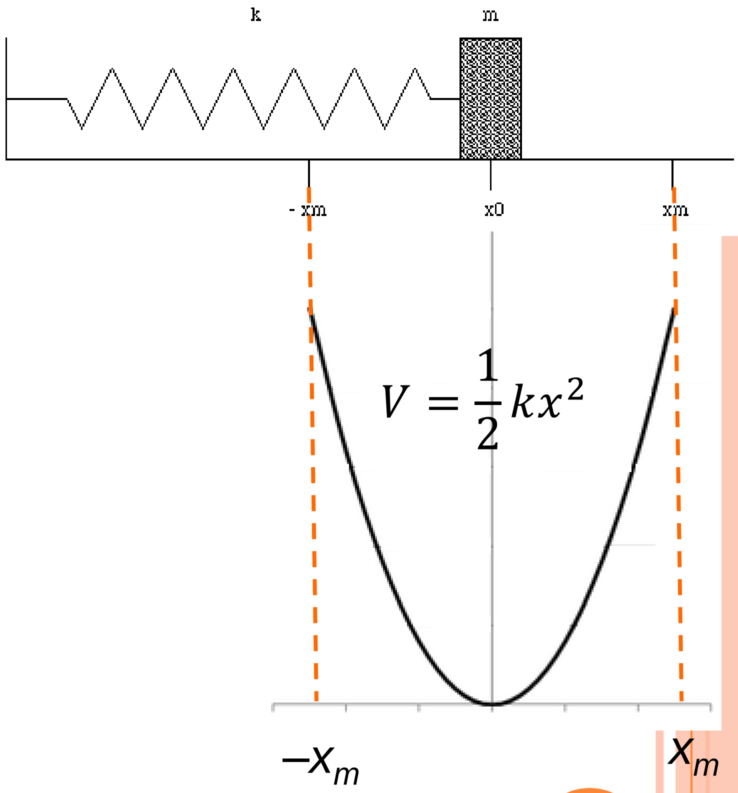
Σωματιδιο σε κουτι: Οι Πληθυσμοι

- Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης για ένα ηλεκτρόνιο σε κουτί πλάτους 7,3 Å φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Παρατηρήστε ότι μόνο ο πληθυσμός που αντιστοιχεί στην ενεργειακή στάθμη $n = 1$ είναι σημαντικός, ενώ όλοι οι άλλοι είναι πρακτικά ίσοι με το μηδέν.

Μοντελο του Αρμονικου Ταλαντωτη

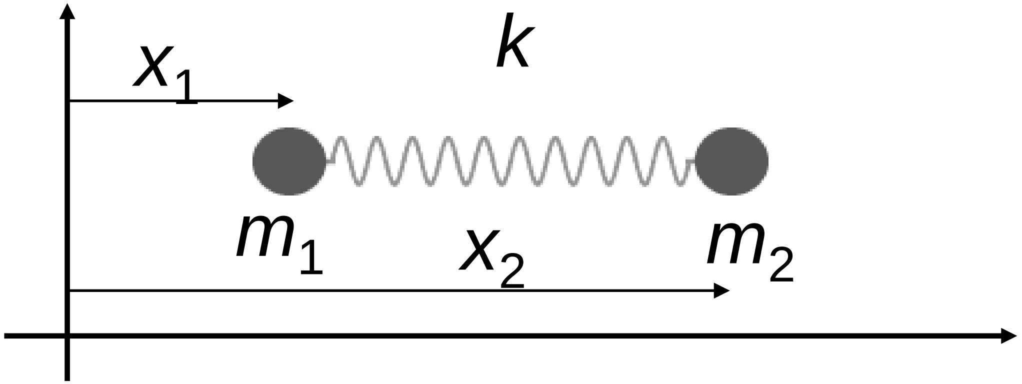
Κλασικος Αρμονικος Ταλαντωτης

- Πρόκειται για ένα μοντέλο για το οποίο γνωρίζουμε ότι η ελεύθερη ταλάντωση γίνεται με την ιδιοσυχνότητα $f = \frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Η δύναμη που ασκεί το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke και ότι η δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{1}{2}kx^2$.
- Η απομάκρυνση η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις του χρόνου.



Σωματα στα δυο Ακρα Ελατηριου

- Μπορούμε να επεκτείνουμε το μοντέλο του κλασικού αρμονικού ταλαντωτή θεωρώντας δύο σώματα στα άκρα ενός ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Θεωρούμε ότι η ταλάντωση γίνεται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου.



Σωματα στα δυο Ακρα Ελατηριου

- Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε και πάλι αρμονική ταλάντωση με συχνότητα που δίνεται από τη σχέση

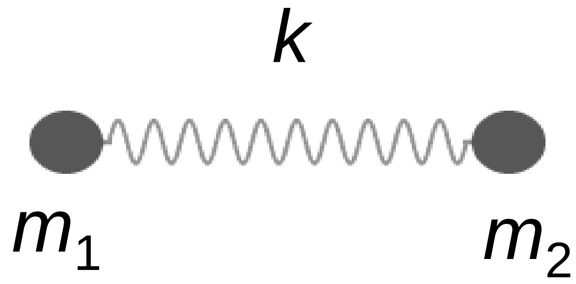
$$f = \frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

όπου $\mu = \frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}$ η ονομαζόμενη ανηγμένη μάζα.

- Η δυναμική ενέργεια δίνεται και πάλι από μια εξίσωση της μορφής $V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \xRightarrow{x_2 - x_1 = x} V = \frac{1}{2}kx^2$.

Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης

- Στη περίπτωση της κβαντομηχανικής χρησιμοποιούμε το μοντέλο του αρμονικού ταλαντωτή για να μελετήσουμε ένα διατομικό μόριο στο οποίο επιτρέπεται η δονητική κίνηση.
- Το μόριο αποτελείται από άτομα με μάζες m_1 και m_2, ενώ ο δεσμός λειτουργεί ως ελατήριο σταθεράς k.
- Σχηματικά



Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης: Τα Ενεργειακα Επιπεδα

- Η εξ. Schrödinger επιλύεται για το δυναμικό $V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$ και δίνει ότι:

  α)Η ενέργεια ειναι ΚΒΑΝΤΙΣΜΕΝΗ και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) hf = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad n = 0,1,2, \ldots}$$

όπου f η συχνότητα κλασικής ταλάντωσης του συστήματος.

Κβαντικός Αρμονικός Ταλαντωτής

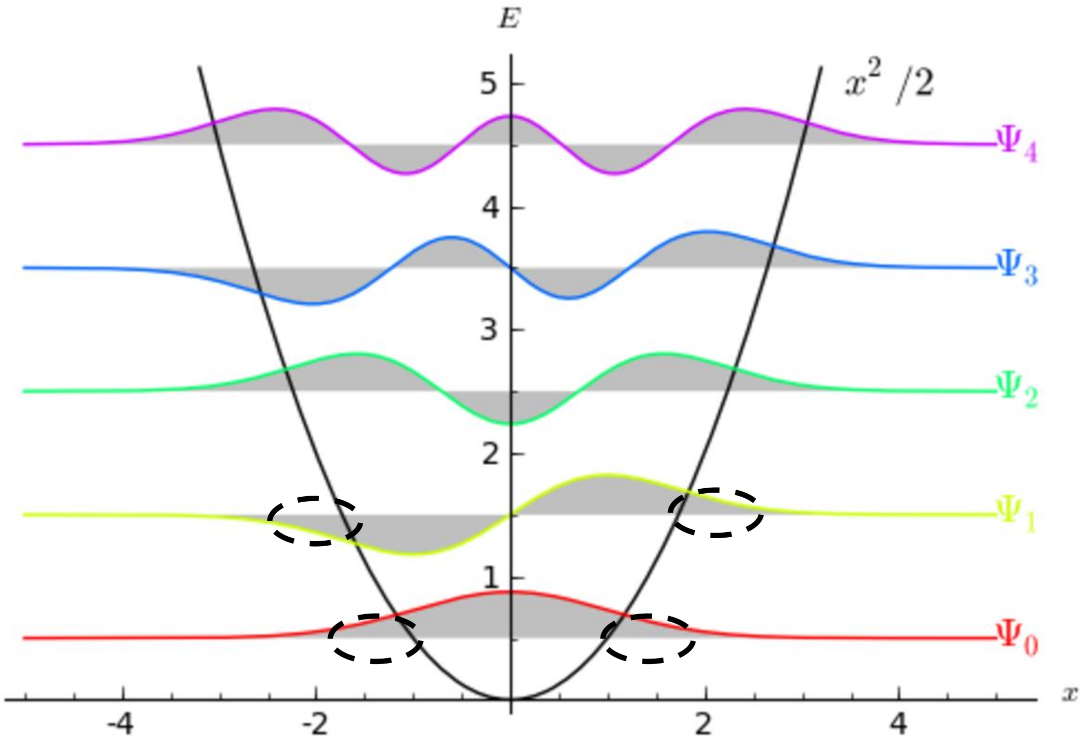
β) Η χαμηλότερη τιμή ενέργειας και πάλι ΔΕΝ μπορεί να είναι η $E_n = 0$, αφού για $n = 0$ προκύπτει ότι $E_n = \frac{hf}{2} = \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται ενέργεια μηδενικού σημείου.

Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης

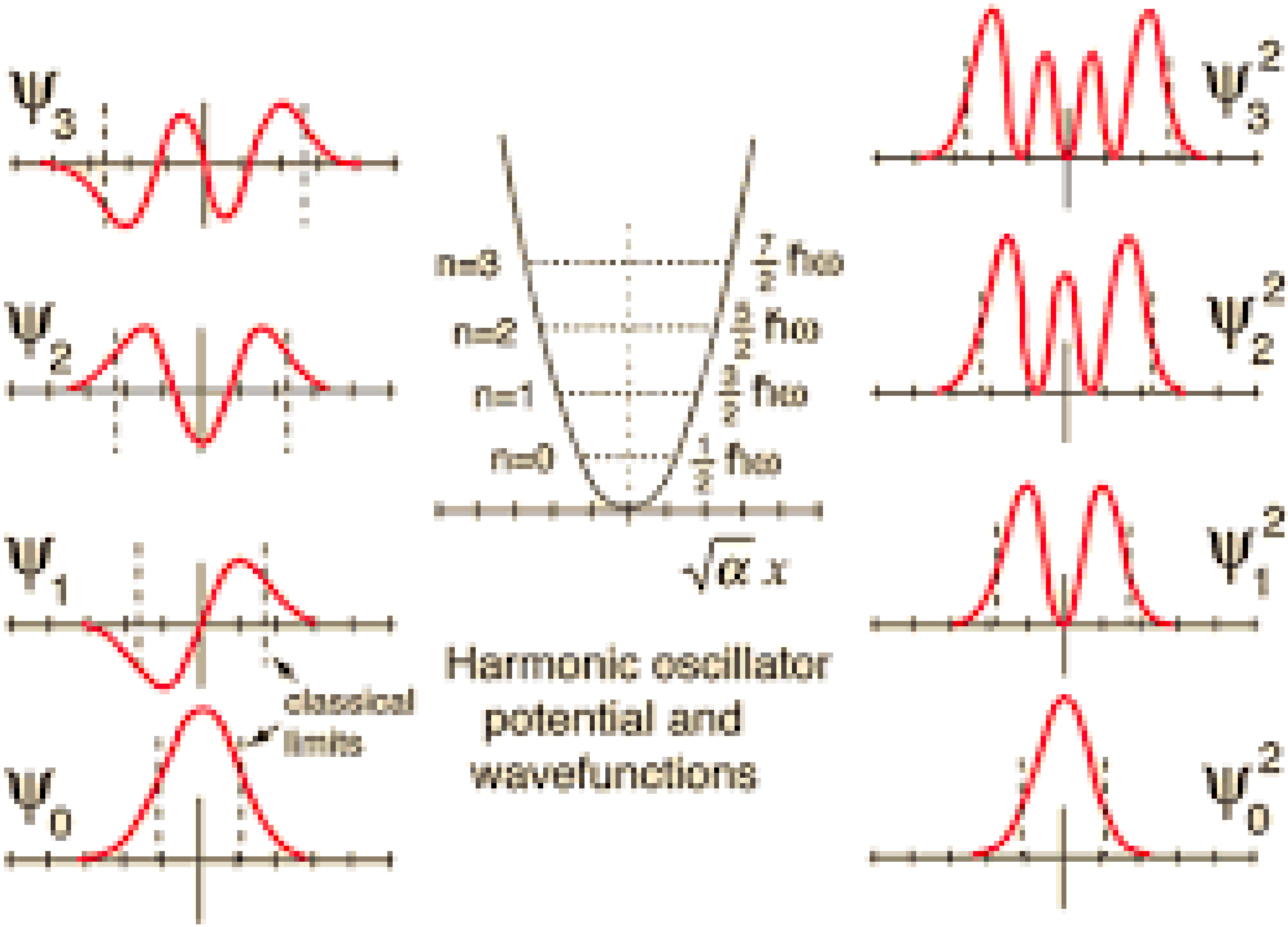
γ) Οι κυματοσυναρτήσεις που μπορούν να περιγράφουν το μόριο είναι αρκετά πολύπλοκές και δεν θα μας απασχολήσουν. Οι γραφικές τους παραστάσεις όμως και πάλι μοιάζουν με αυτές των στάσιμων κυμάτων.

Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης

- Προσέξτε ότι ένα νέο χαρακτηριστικό είναι ότι υπάρχει πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί έξω από τα κλασικά όρια μιας ταλάντωσης.



Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης



Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης: Οι Πληθυσμοι

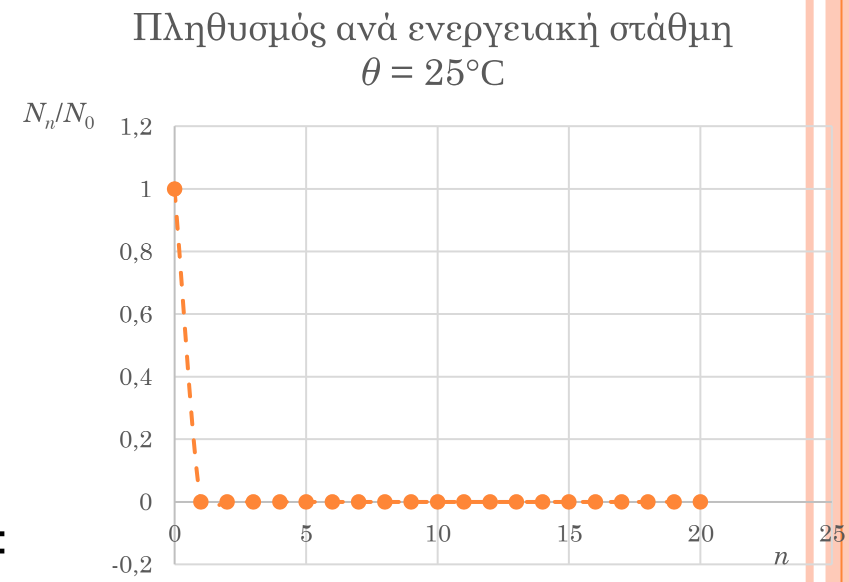
- Με βάση την κατανομή Boltzmann, το πλήθος των μορίων N_n που θα έχουν ενέργεια λόγω περιστροφής ίση με E_n, σε σχέση με το πλήθος των μορίων N_0 που θα έχουν την μικρότερη ενέργεια $E_0 = \frac{hf}{2} = \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, θα είναι

$$N_n = N_0 e^{-(E_n - E_0)/k_B T} \xRightarrow{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

$$\Rightarrow N_n = N_0 e^{-n\frac{h}{2\pi k_B T}\sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

Κβαντικος Αρμονικος Ταλαντωτης: Οι Πληθυσμοι

- Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης για το μόριο του HCℓ που είναι γραμμικό φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Παρατηρήστε ότι μόνο ο πληθυσμός που αντιστοιχεί στην ενεργειακή στάθμη $n = 0$ είναι σημαντικός, ενώ όλοι οι άλλοι είναι πρακτικά ίσοι με το μηδέν.



Μια Συνδεση με τα Προηγουμενα

- Η διαφορά δυο ενεργειακών σταθμών n και k $(n > k)$ του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$E_n - E_k = \Delta E = \left(n + \frac{1}{2}\right) hf - \left(k + \frac{1}{2}\right) hf =$$

$$\Rightarrow \Delta E = (n - k)hf$$

- Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη διαφορά είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας hf.
- Ουσιαστικά, ο Planck «μάντεψε» αυτή τη σχέση, κατά της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα μέλαν σώμα, δεχόμενος ότι τα τοιχώματα του μέλανος σώματος είναι αρμονικοί ταλαντωτές που μπορούν να βρίσκονται σε διακριτές ενεργειακές στάθμες και εκπέμπουν ενέργεια ίση με hf κάθε φορά που αλλάζουν ενεργειακή στάθμη.

Πραγματικα Διατομικα Μορια

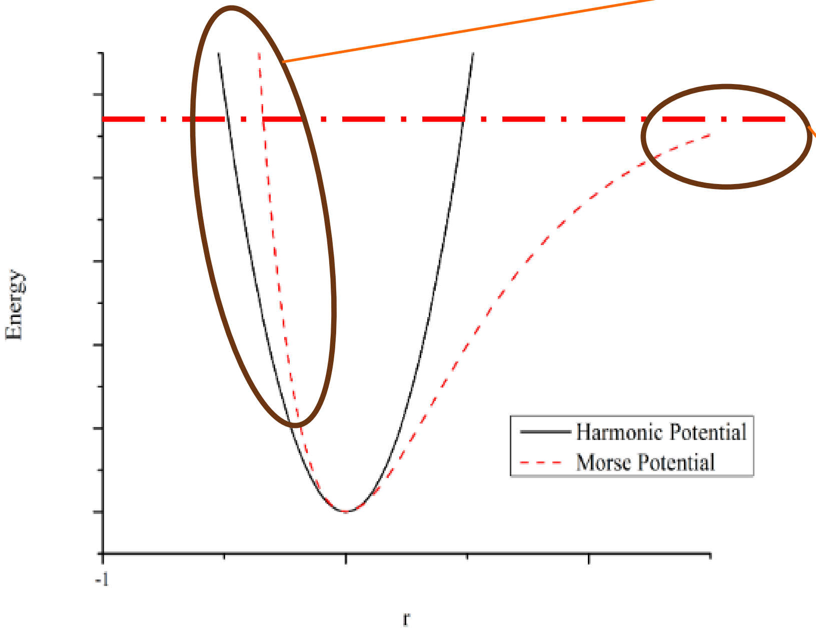
- Στη περίπτωση τώρα των πραγματικών διατομικών μορίων, η συνάρτηση που περιγράφει τη δυναμική ενέργεια δεν είναι ακριβώς τετραγωνική, και δεν είναι πότε γνωστή η αναλυτική της έκφραση.
- Υπάρχουν όμως εμπειρικοί τρόποι περιγραφής αυτής της δυναμικής ενέργειας με τον πιο συνηθισμένο να είναι η δυναμική ενέργεια Morse η οποία περιγράφεται από μια συνάρτηση της μορφής

$$V = D_e\left(1 - e^{-\beta x}\right)^2$$

όπου, D_e και β σταθερές εξαρτώμενες από το συγκεκριμένο διατομικό μόριο.

Πραγματικα Διατομικα Μορια

- Δεν θα ασχοληθούμε με την μαθηματική έκφραση, αλλά μόνο με τη γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης καθώς παρουσιάζει δύο σημαντικά χαρακτηριστικά.



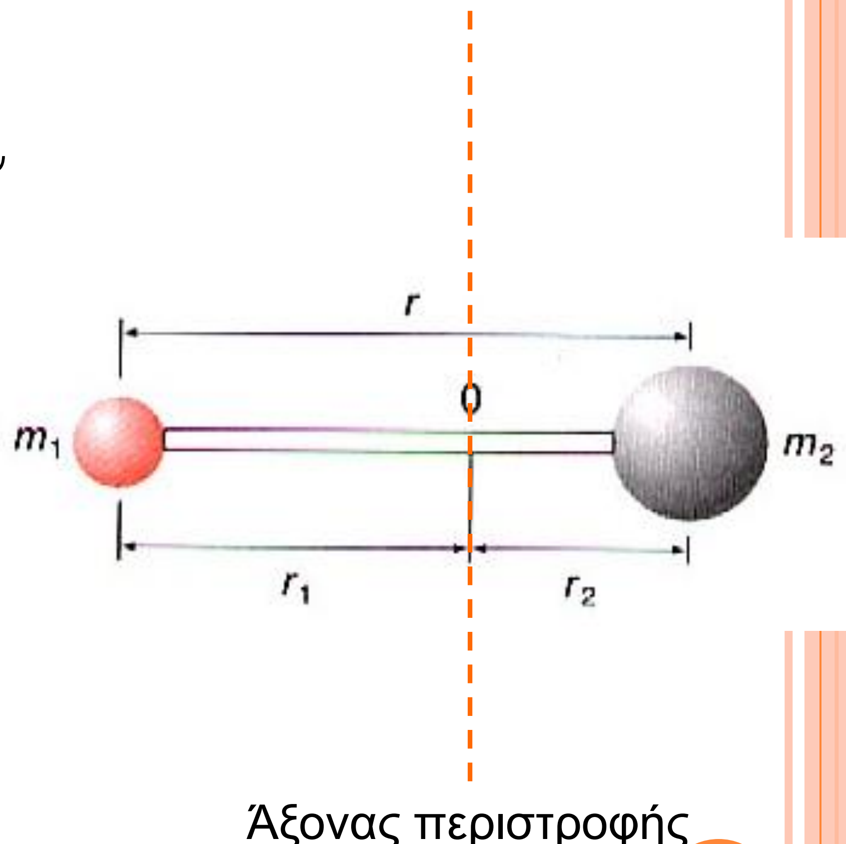
Καθώς η απόσταση του δεσμού μειώνεται, η συνάρτηση αυξάνεται πολύ γρήγορα, δείγμα ότι εμφανίζεται μεγάλη δύναμη

Ο δεσμός, καθώς η απόσταση μεταξύ των ατόμων αυξάνεται, μπορεί σπάσει

Μοντελο Ακαμπτου Κβαντικου Περιστροφεα

Το Κλασικο Μοντελο: Ο Αλτηρας

- Πρόκειται για ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2, που συνδέονται μεταξύ τους με άκαμπτη ράβδο αμελητέας μάζας και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κάποιο σημείο Ο.



Το Κλασικο Μοντελο: Ο Αλτηρας

- Για ένα τέτοιο σύστημα γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας για άξονα από το Ο είναι:

$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = \mu \cdot r^2$$

που αποδεικνύεται ίση με $I = \mu \cdot r^2$ όπου $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ η ανηγμένη μάζα.

Το Κλασικο Μοντελο: Ο Αλτηρας

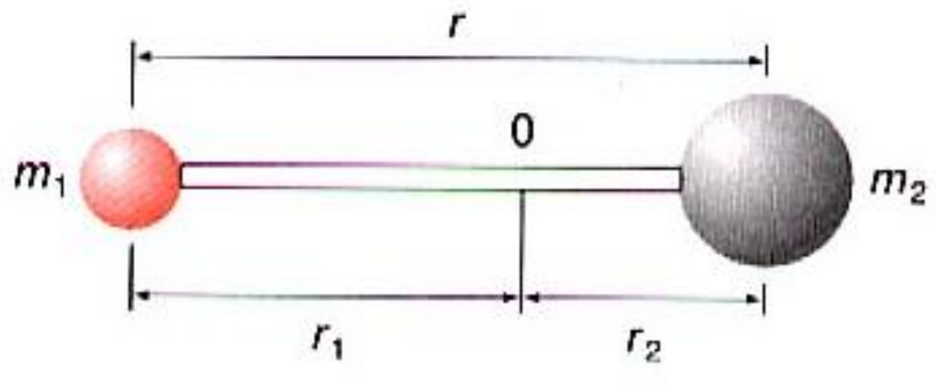
- Για ένα τέτοιο σύστημα γνωρίζουμε επίσης ότι η κινητική ενέργεια είναι συνεχής ποσότητα που υπολογίζεται ως:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

Ο Κβαντικός Περιστροφέας

- Πρόκειται για το κβαντικό μοντέλο του αλτήρα δηλ. δύο άτομα που συνδέονται με άκαμπτο τρόπο και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κάποιο άξονα που διέρχεται από το Ο.



Ο Κβαντικος Περιστροφεας

- Στη περίπτωση της κβαντομηχανικής χρησιμοποιούμε το μοντέλο του κβαντικού περιστροφέα για να μελετήσουμε ένα διατομικό μόριο στο οποίο επιτρέπεται η περιστροφική κίνηση.

Ο Κβαντικος Περιστροφεας: Τα Ενεργειακα Επιπεδα

- Η εξ. Schrödinger επιλύεται και δίνει ότι η ενέργεια ειναι ΚΒΑΝΤΙΣΜΕΝΗ και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E_n = n \cdot (n+1) \cdot \frac{h^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot I} \quad n = 0,1,2,\ldots}$$

Ο Κβαντικος Περιστροφεας: Οι Πληθυσμοι

- Με βάση την κατανομή Boltzmann, το πλήθος των μορίων N_n που θα έχουν ενέργεια λόγω περιστροφής ίση με E_n, σε σχέση με το πλήθος των μορίων N_0 που θα έχουν την μικρότερη ενέργεια $E_0 = 0$, θα είναι

$$N_n = N_0 e^{-(E_n - E_0)/k_B T} \xRightarrow{E_n = n(n+1)\frac{h^2}{8\pi^2 I}}$$

$$\Rightarrow N_n = N_0 e^{-n(n+1)\frac{h^2}{8\pi^2 I k_B T}}$$

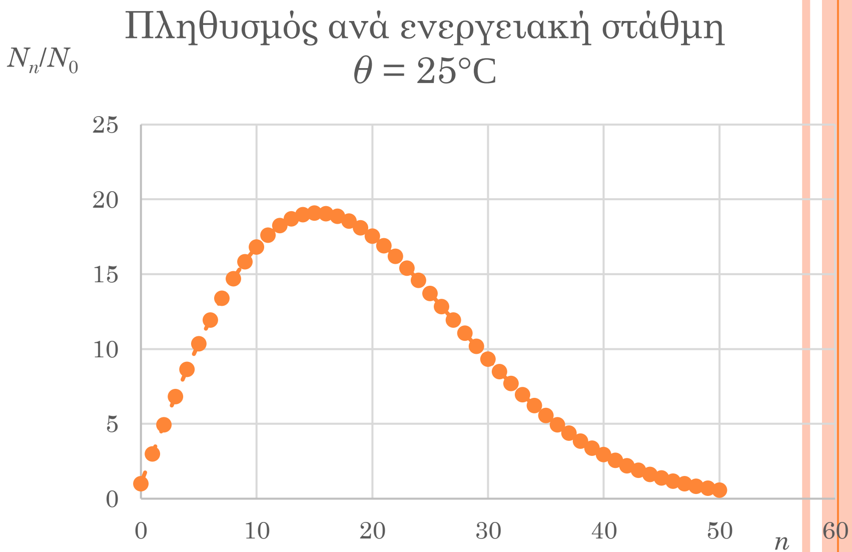
Ο Κβαντικος Περιστροφεας: Οι Πληθυσμοι

- Επειδή όμως στο μοντέλο αυτό υπάρχει εκφυλισμός, δηλαδή υπάρχει ένα πλήθος ίσο με $2n + 1$ από διαφορετικές κυματοσυναρτήσεις με την ίδια περιστροφική ενέργεια, η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$N_n = (2n + 1)N_0 e^{-n(n+1)\frac{h^2}{8\pi^2 IkT}}$$

Ο Κβαντικος Περιστροφεας: Οι Πληθυσμοι

- Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης για το μόριο του N_2O που είναι γραμμικό φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Παρατηρήστε ότι υπάρχουν πολύ σημαντικοί πληθυσμοί σε στάθμες με $n > 1$, επομένως οι παρατηρούμενες μεταβάσεις δεν γίνονται μόνο από τη στάθμη $n = 0$.



ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ

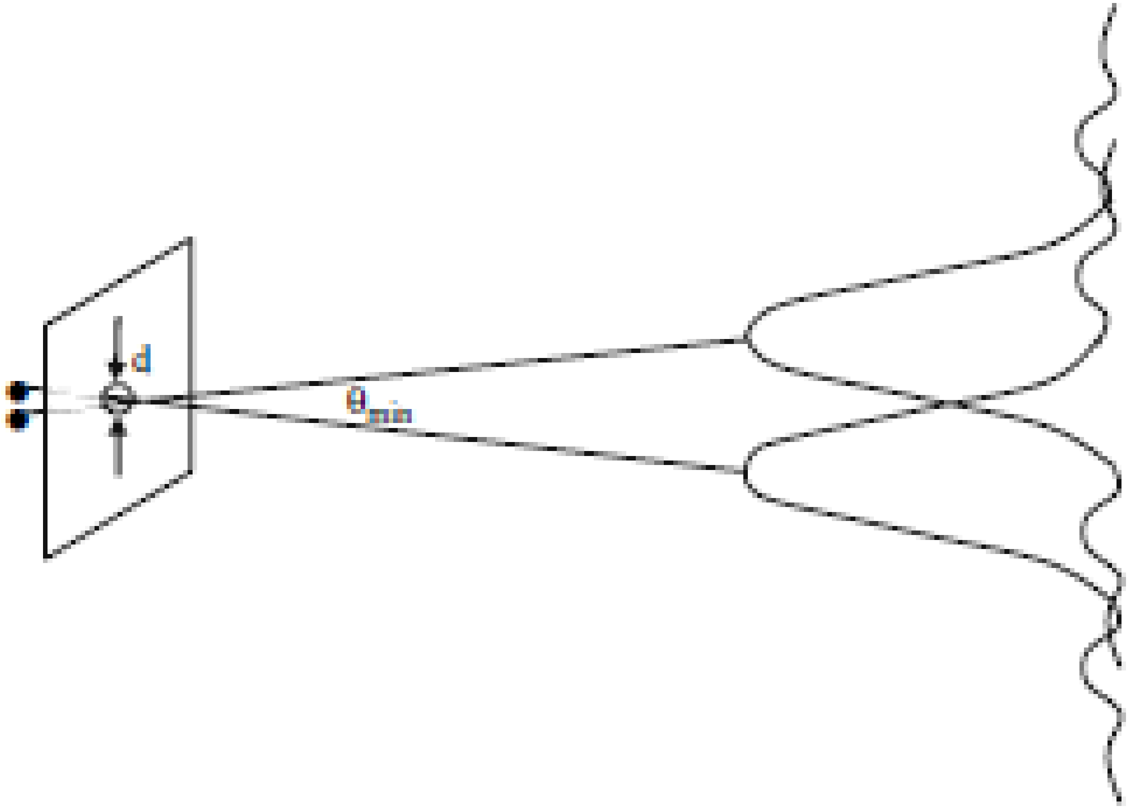
ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh, η «γωνιακή απόσταση» που πρέπει να χωρίζει δύο σημεία, όταν αυτά παρατηρούνται μέσα από ένα άνοιγμα διαμέτρου d, ώστε να είναι διακριτά είναι:

$$\boxed{\theta_{min} = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{d}}$$

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Ο περιορισμός αυτός τίθεται από την περίθλαση και σχηματικά έχουμε:



ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Αν χρησιμοποιήσουμε ορατό φως προκύπτει ότι, υπό τις βέλτιστες συνθήκες, η διακριτική ικανότητα περιορίζεται περίπου στα 200 nm = 0,2 μm.
- Ένας «χοντρικός» κανόνας είναι ότι με φως μήκους κύματος λ μπορούμε να διακρίνουμε λεπτομέρειες που απέχουν επίσης λ.

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Πως μπορούμε να αυξήσουμε τη διακριτική ικανότητα;
- Η διακριτική ικανότητα αυξάνει όσο η ελάχιστη γωνία ($\theta_{\min}$) μειώνεται, καθώς αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ξεχωρίζουμε σημεία που απέχουν μικρότερη απόσταση μεταξύ τους.

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Ένας από τους τρόπους να μειώσουμε το $\theta_{\min}$ είναι να χρησιμοποιήσουμε ακτινοβολία με μικρότερο μήκος κύματος.
- Ο άλλος τρόπος είναι να αυξήσουμε το d, αλλά αυτό είναι συνήθως δύσκολο τεχνολογικά.

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Για διαφορετικούς λόγους δεν είναι εύκολο ή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μικρότερο κύματος από το ορατό, δηλ. υπεριώδεις, ακτίνες X ή ακτίνες γ.

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Αντί αυτών, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων.
- Σύμφωνα με την ιδέα του δυισμού, του de Broglie, το μήκος κύματος που συνδέεται με ένα σωματίδιο είναι ίσο με $\lambda = \frac{h}{p}$.

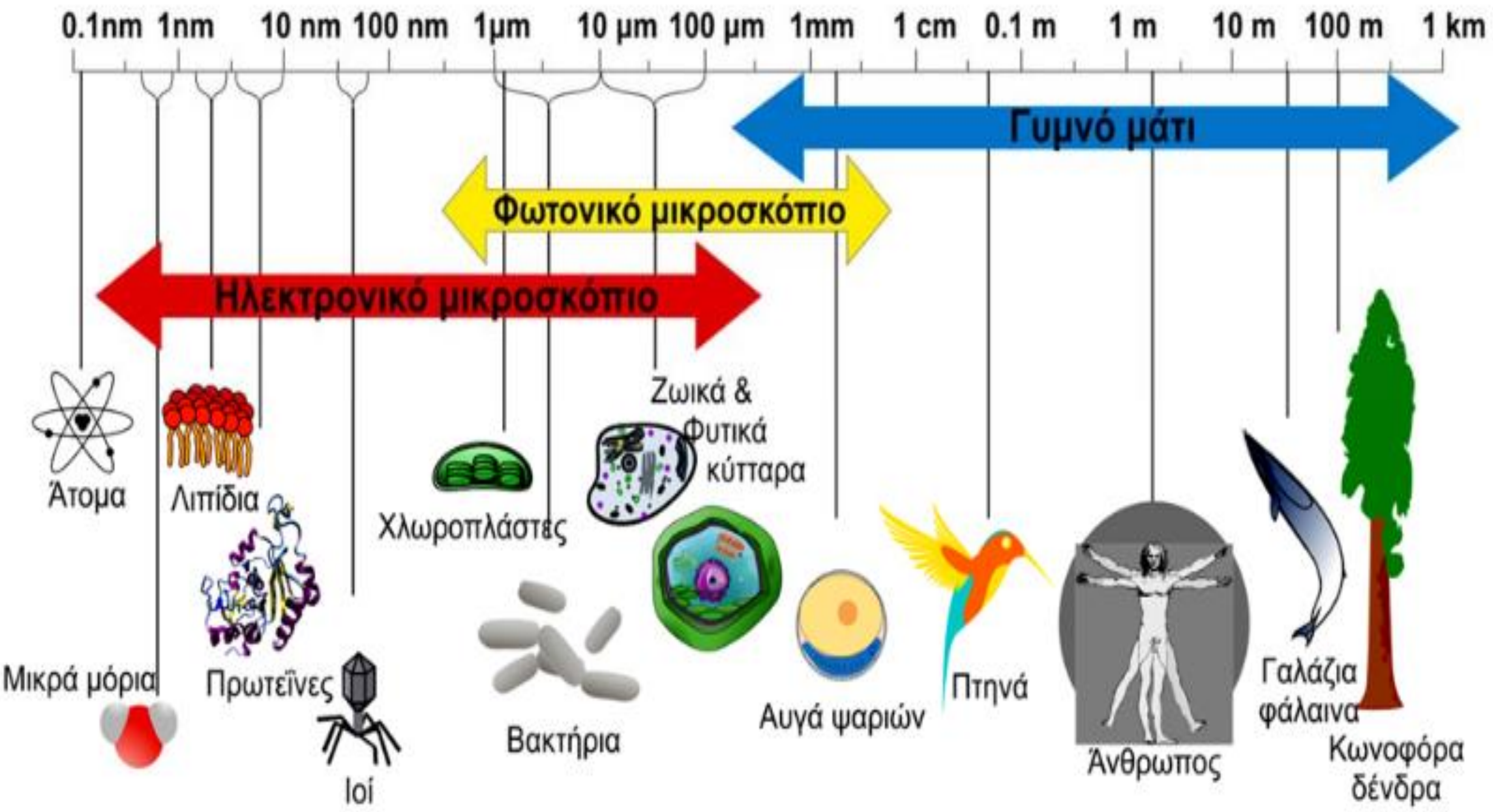
ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει η ορμή, δηλ. η ταχύτητα ή η ενέργεια ενός σωματιδίου, τόσο μειώνεται το μήκος κύματος.
- Για παράδειγμα, ηλεκτρόνια με ενέργεια 50 keV, έχουν μήκος κύματος ίσο με 0,005 nm.

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

- Αυτό σημαίνει ότι το μήκος κύματος είναι πολύ μικρότερο από αυτό των ορατών ακτινοβολιών (400 – 700 nm), επομένως θα έχουμε μια πολύ μεγάλη αύξηση της διακριτικής ικανότητας.

ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ



ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ

- Τα βασικά μέρη ενός ηλεκτρονικού μικροσκοπίου είναι μια πηγή ηλεκτρονίων, ένας «συγκεντρωτικός φακός», το στήριγμα του δείγματος, ένας αντικειμενικός φακός και ένας ανιχνευτής.
- Όλα αυτά βρίσκονται σε υψηλό κενό.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ

- Σχηματικά

Παράγει και επιταχύνει τα *e*⁻ ώστε να αποκτήσουν κατάλληλη ενέργεια

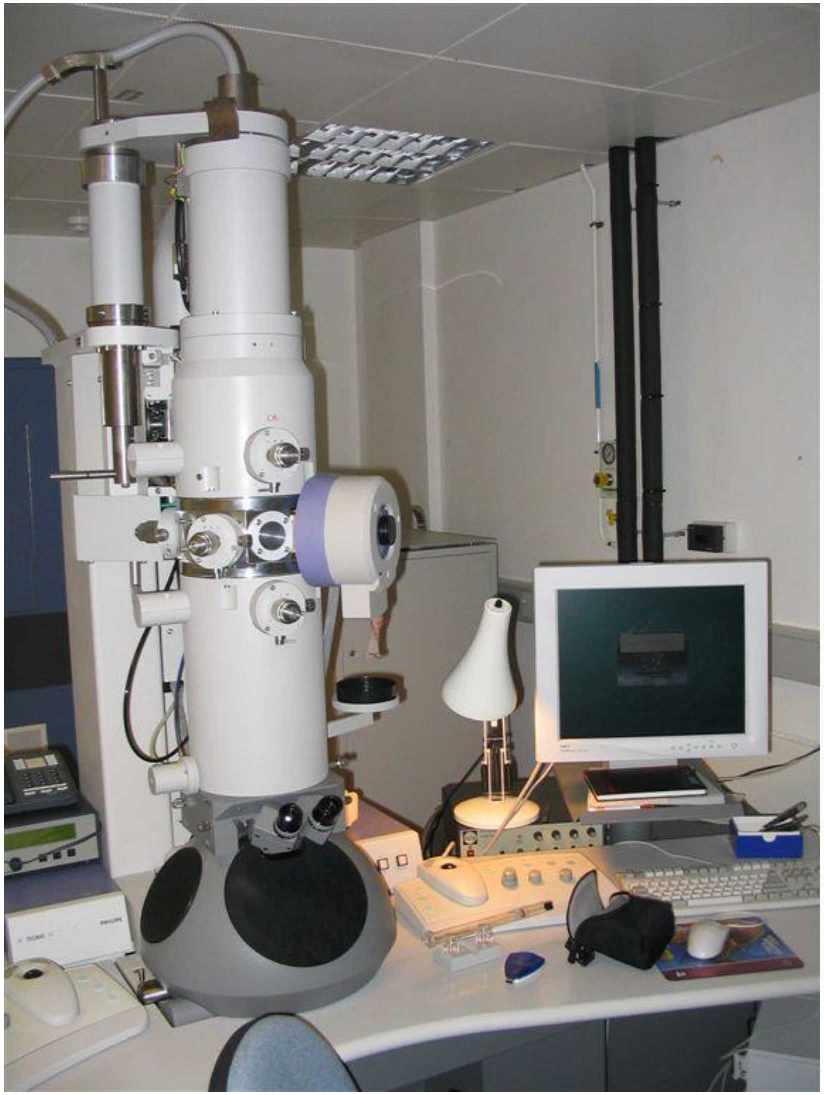
Πρόκειται για μαγνητικό πεδίο που εστιάζει τα *e*⁻ στο δείγμα

Θέση δείγματος

Πρόκειται για μαγνητικό πεδίο που συγκεντρώνει τα *e*⁻

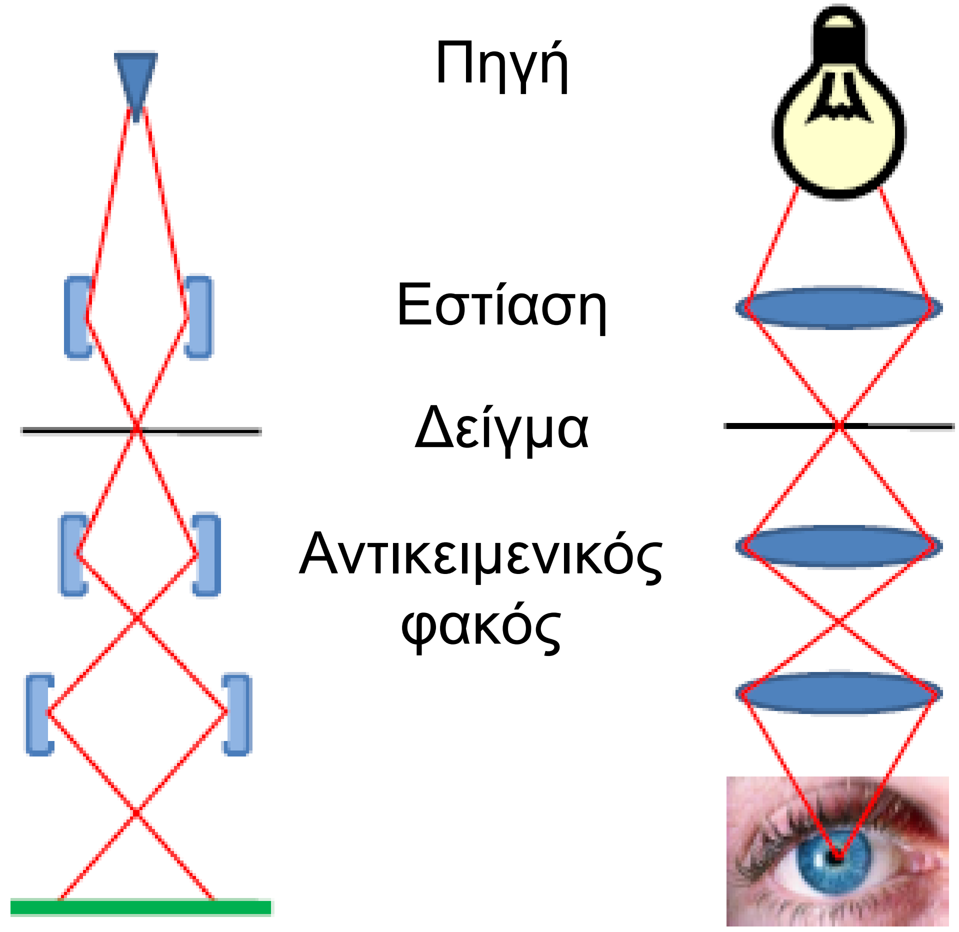
Σχηματίζεται η εικόνα

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ



ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ ΟΠΤΙΚΟΥ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟΥ

- Υπάρχουν σημαντικές ομοιότητες μεταξύ των δύο οργάνων



ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ

ΟΠΤΙΚΟ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΟ

ΤΥΠΟΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΩΝ

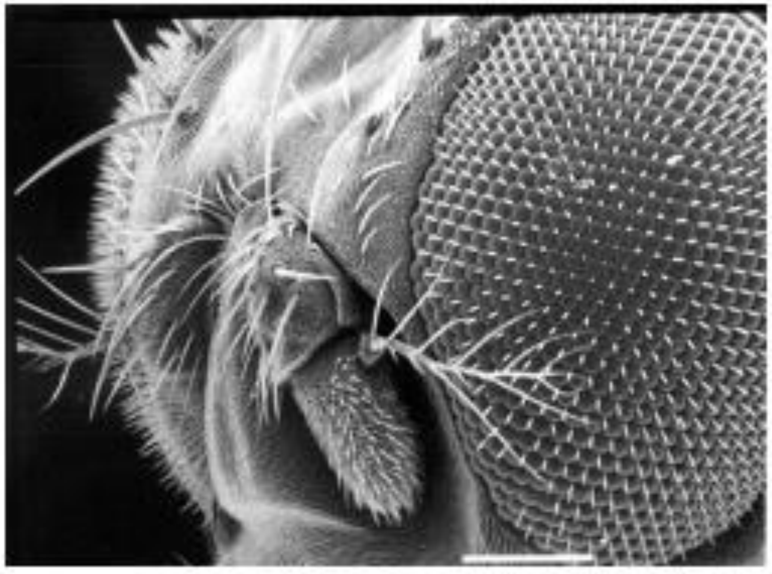
- Υπάρχουν αρκετοί τύποι ηλεκτρονικών μικροσκοπίων, αλλά δύο είναι οι βασικοί τύποι
- Πρόκειται για το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο διέλευσης (TEM) και το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο σάρωσης (SEM).

ΤΥΠΟΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΩΝ

- Στο πρώτο (TEM) η εικόνα σχηματίζεται μετά από διέλευση των ηλεκτρονίων από το δείγμα.
- Στο σχήμα φαίνεται ένα ραβδοειδής ιός (Filamentous bacteriophage).

ΤΥΠΟΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΩΝ

- Στο δεύτερο (SEM) η εικόνα σχηματίζεται μετά από ανάκλαση των ηλεκτρονίων στο δείγμα.
- Στο σχήμα φαίνεται ο οφθαλμός μιας μύγας.



Παράρτημα

Χχονοεξαρτώμενη Εξίσωση Schrödinger

Εξισωση Schrödinger

- Η εξίσωση που περιγράφει τις κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων που κινούνται στη μια διάσταση είναι η εξίσωση Schrödinger

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\Psi(x,t)=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

όπου m η μάζα του σωματιδίου, $V(x)$ η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας (δυναμικό του πεδίου) εντός του οποίου κινείται το σωματίδιο και $\Psi(x,t)$ η ονομαζόμενη κυματοσυνάρτηση που εξαρτάται από τη θέση x και τη χρονική στιγμή t.

Χωρισμος Μεταβλητων

- Στα συστήματα που θα εξετάσουμε εδώ, είναι V $= V(x)$, δηλαδή, δεν υπάρχει εξάρτηση από το χρόνο, οπότε στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα του διαχωρισμού των μεταβλητών σύμφωνα με την οποία μπορούμε να εκφράσουμε την κυματοσυνάρτηση στη μορφή $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$.

Εξισωση Schrödinger

- Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση αυτή στην αρχική εξίσωση έχουμε

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\varphi(t)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x)\varphi(t)=-\frac{h}{2\pi i}\psi(x)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)=-\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{\varphi(t)}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}=E$$

Παρατηρώ ότι οι μεταβλητές έχουν χωριστεί, επομένως για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει ο κάθε όρος να είναι ίσος με μια σταθερά E που θα αποδειχθεί ότι είναι η ενέργεια του σωματιδίου.

Εξαρτηση απο το Χρονο

- Από το δεύτερο μέλος της προηγούμενης εξίσωση έχουμε ότι

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{\varphi(t)}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}=E$$

εξίσωση που μπορεί εύκολα να λυθεί και δίνει ως λύσεις συναρτήσεις της μορφής:

$$\boxed{\varphi(t)=e^{-\frac{2\pi i}{h}Et}}$$

Χρονοανεξαρτητη Εξισωση Schrödinger

- Παρομοίως, από το πρώτο μέλος της προηγούμενης εξίσωσης, έχουμε

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x) = E \Rightarrow$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

που είναι η χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger.

Τελικη Λυση της Εξισωσης Schrödinger

- Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τη συνολική λύση θα πρέπει να λύσουμε την χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger.
- Η τελική λύση θα είναι λοιπόν μια λύση της μορφής

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t) \Rightarrow \boxed{\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{2\pi i}{h}Et}}$$

όπου $\psi(x)$ η λύση της χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger.

Στασιμες Καταστασεις

- Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε τώρα ότι ισχύει $|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$.
- Αυτό σημαίνει ότι *η χρονική εξέλιξη δεν έχει καμία μετρήσιμη επίδραση* αφού η πιθανότητα είναι χρονικά αμετάβλητη.
- Οι καταστάσεις αυτές λοιπόν που προκύπτουν ως λύσεις της χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger ονομάζονται **στάσιμες καταστάσεις** και έχουν **καθορισμένη ενέργεια**.

Καταστασεις Επαλληλιας

- Ένα κβαντικό σύστημα δεν είναι απαραίτητο να περιγράφεται από μια λύση που αντιστοιχεί σε στάσιμη κατάσταση (δηλ. σε λύση της χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger).
- **Ως αποτέλεσμα μιας εξωτερικής διαταραχής, το κβαντικό μας σύστημα μπορεί να βρεθεί σε μια κατάσταση επαλληλίας,** όπου η κυματοσυνάρτηση που το περιγράφει προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός στάσιμων καταστάσεων, δηλαδή ισχύει ότι

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x)$$

- Οι συντελεστές c_i δίνουν τις πιθανότητες $P_i = |c_i|^2$ να βρούμε σε μια μέτρηση το σύστημα στην κατάσταση $\psi_i(x)$ έχοντας ενέργεια E_i.
- Φυσικά ισχύει ότι $\sum_i |c_i|^2 = 1$.

Καταστασεις Επαλληλιας

- Φυσικό είναι να θεωρήσουμε ότι η χρονική εξέλιξη μιας κατάστασης επαλληλίας της μορφής

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x)$$

να περιγράφεται από την χρονική εξέλιξη των στάσιμων καταστάσεων, δηλαδή:

$$\Psi(x,t) = \sum_i c_i \psi_i(x) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_i t}$$

- Φυσικά