Σας ενημερώνουμε ότι τα μαθήματα που παρέχονται από το Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, στο πλαίσιο της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης μπορεί να βιντεοσκοπούνται. Η βιντεοσκόπηση πραγματοποιείται για σκοπούς εκπαιδευτικούς και αρχειακούς. Τα βίντεο μπορεί να αναρτηθούν στο διαδίκτυο.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Να κατανοήσετε από μικροσκοπική και μακροσκοπική άποψη το ιξώδες που εμφανίζουν τα πραγματικά ρευστά.
- Να γνωρίσετε πως σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα προσδιορίζεται ποσοτικά το ιξώδες (συν/στης ιξώδους)
- Να μάθετε πως διαχωρίζονται τα ρευστά σε νευτώνεια και μη-νευτώνεια
- Να μάθετε ποιοι παράγοντες και πως επηρεάζουν (σύμφωνα με το νόμο του Poiseuille) την παροχή ρευστού που ρέει με στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα
- Να μάθετε τι είναι η ορική ταχύτητα και πότε την αποκτά ένα στερεό κατά την πτώση του σε ρευστό
- Να μάθετε πότε η ροή ενός ρευστού γίνεται τυρβώδης
- Να γνωρίσετε ένα απλό μοντέλο για το πως τα εναιωρήματα σωμάτων σε ρευστό επηρεάζουν το ιξώδες του και να κατανοήσετε γιατί το αίμα δεν ακολουθεί αυτό το μοντέλο.

¨Πραγματικά Ρευστά¨ - Ιξώδες, Στροβιλισμός

Τα πραγματικά ρευστά είναι ιξώδη.

- **Μακροσκοπικά**:
  - Ιξώδες είναι η εσωτερική τριβή σε ένα ρευστό. Οι δυνάμεις τριβής αντιτίθενται στην κίνηση ενός τμήματος του ρευστού ως προς ένα άλλο τμήμα του.
  - Μπορούμε να θεωρήσουμε το ιξώδες ως μέτρο της αντίστασης ενός υγρού στη ροή του.
- **Μικροσκοπικά**:
  - Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων τους προκαλεί, κατά την κίνησή τους, την εμφάνιση ελκτικών διατμητικών δυνάμεων μεταξύ των κινουμένων τμημάτων τους, τα οποία δεν μπορεί πλέον να θεωρηθεί ότι κινούνται ανεξάρτητα. Η επενέργεια των διαμοριακών δυνάμεων προκαλεί μεταφορά ενέργειας από το ένα τμήμα του ρευστού στο άλλο, με αποτέλεσμα οι ταχύτητες των τμημάτων αυτών να τείνουν να εξισωθούν έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη δυνάμεων τριβής ή αντίστασης σε κάθε σχετική κίνηση των μορίων. Το έργο αυτών των δυνάμεων αντίστασης είναι οι απώλειες της μηχανικής ενέργειας του ρευστού που εκδηλώνονται με την ελαφρά θέρμανσή του.

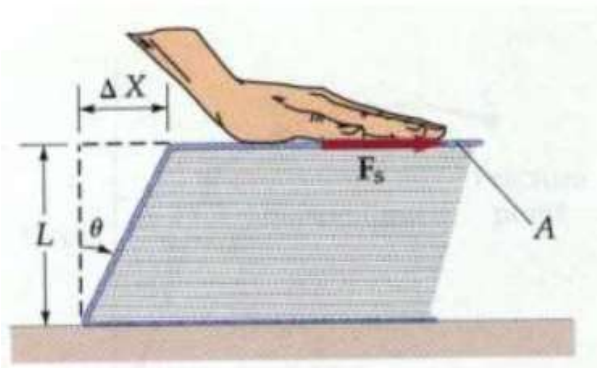
Ποσοτικός προσδιορισμός ιξώδους

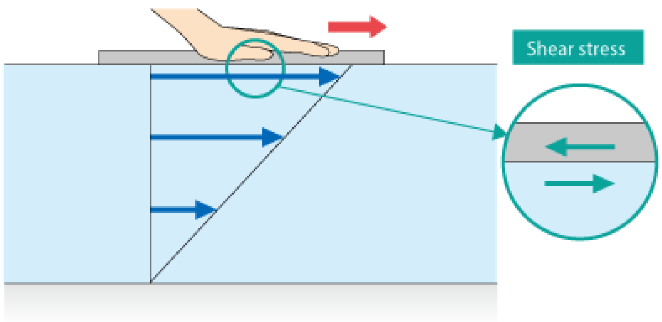
Ένας ποσοτικός ορισμός του ιξώδους δίνεται εξετάζοντας την περίπτωση στρωτής ροής υγρού ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες

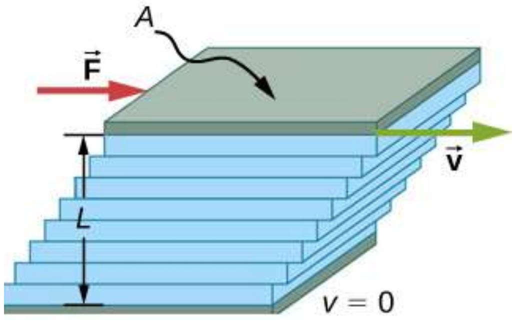
Στρωτή ροή μεταξύ δύο παραλλήλων πλακών

- Η κάτω πλάκα ακίνητη.

- Η πάνω πλάκα σύρεται από εξωτερική δύναμη ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα ***u*** παράλληλα στην επιφάνειά της.







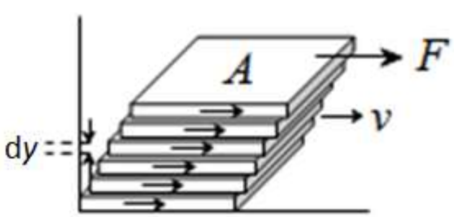
(Αν το υγρό δεν ασκούσε καμία αντίσταση στην σταθερή εξωτερική δύναμη, η άνω πλάκα θα επιταχυνόταν συνεχώς ομαλά. Αντίθετα, εξαιτίας των δυνάμεων αντίστασης του υγρού, - που όμως έρχονται από όλο τον όγκο του υγρού - η πάνω πλάκα σύντομα αποκτά σταθερή ταχύτητα εκτελώντας ομαλή κίνηση.)

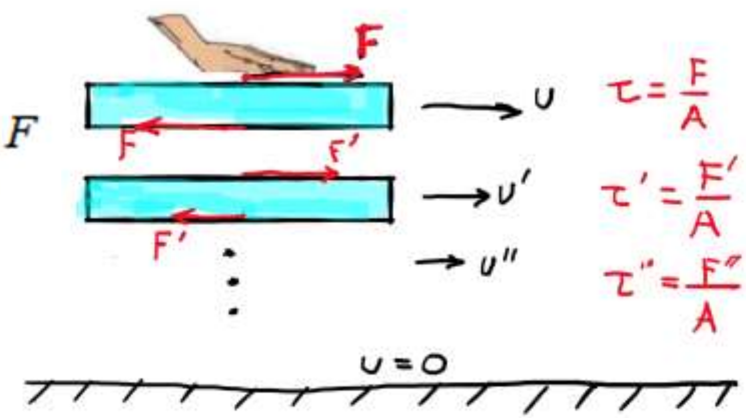
Ποσοτικός προσδιορισμός ιξώδους

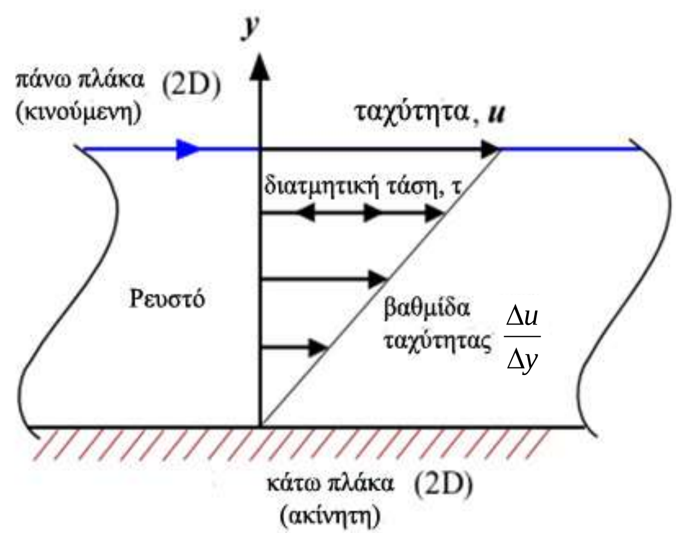
Στρωτή ροή μεταξύ δύο παραλλήλων πλακών

- Αν ο στοιχειώδης όγκος του ρευστού, που περνά από τυχαίο σημείο του πεδίου ροής, διαγράφει πάντοτε την ίδια γραμμή ροής ενώ η ταχύτητά του στο δεδομένο σημείο είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η ροή ονομάζεται **μόνιμη (steady)**. Στην ειδική περίπτωση που η μόνιμη ροή γίνεται κατά παράλληλα στρώματα, καθένα από τα οποία έχει καθορισμένη ταχύτητα, η ροή ονομάζεται **στρωτή (laminar)**.

- Δύο στρώματα εφαπτόμενα κατά επιφάνεια *A*, ασκούν το ένα στο άλλο, λόγω των δυνάμεων συνοχής, διατμητική δύναμη *F* (ίσου μέτρου, προς τα αριστερά στο πάνω μέρος, προς τα δεξιά στο κάτω) η οποία τείνει να εξισώσει τις ταχύτητες.



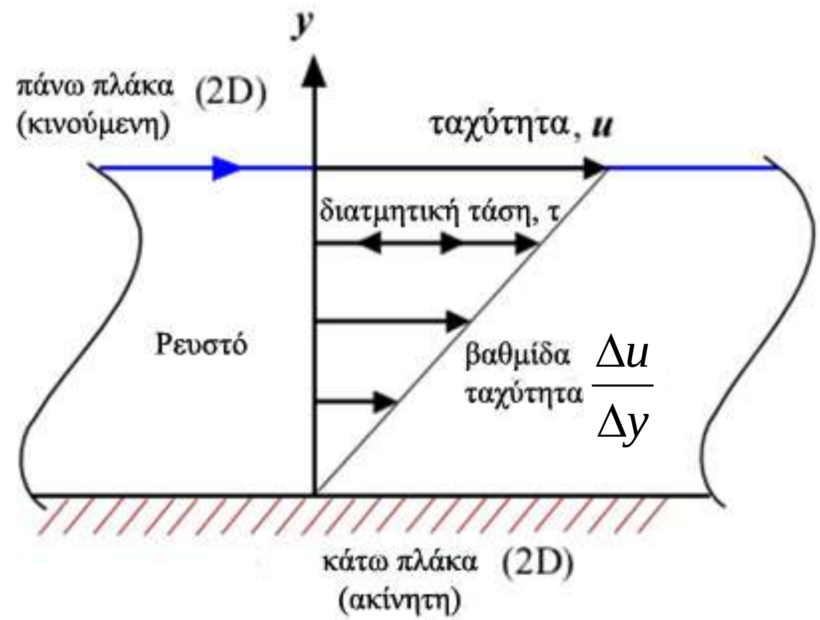




Υπενθύμιση:
Για τις δυνάμεις F *που* ακούνται παράλληλα σε μία επιφάνεια A, ορίζεται η διατμητική τάση σε αυτήν την επιφάνεια $\tau = F/A$

Νόμος Νεύτωνα για το ιξώδες:

Για στρωτή ροή η διατμητική τάση *τ*, μεταξύ των ενδιαμέσων στρωμάτων του ρευστού είναι ανάλογη της βαθμίδας της ταχύτητας $\Delta u/\Delta y$ στην κάθετη διεύθυνση ως προς αυτά τα στρώματα, δηλ. με άλλα λόγια της σχετικής κίνησης των στρωμάτων του ρευστού.



$$\tau = \eta \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

Ο συντελεστής *η*, που υπεισέρχεται στον νόμο του Νεύτωνα, είναι σταθερά χαρακτηριστική του ρευστού και ονομάζεται **συντελεστής ιξώδους** ή απλώς **ιξώδες**.

Το ***ιξώδες*** (***η***) ορίζεται από τη σχέση μεταξύ:

της *<u>διατμητικής τάσης</u>*, ή της δύναμης παράλληλα στην επιφάνεια της πλάκας ανά μονάδα επιφάνειας που απαιτείται για να διατηρείται ομαλή η κίνηση της άνω πλάκας

και της *<u>βαθμίδας της ταχύτητας</u>* ανάμεσα στις πλάκες, Δ*u*/Δ*y* (γνωστή ως ρυθμός διατμητικής παραμόρφωσης)

$$\frac{F_{\pi\lambda\alpha\kappa\alpha}}{A_{\pi\lambda\alpha\kappa\alpha}} = \eta \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στο βιβλίο Φυσικής κατεύθυνσης της Γ’ Λυκείου θεωρείται $\Delta u = u - 0 = u$ και $\Delta y = l$, οπότε η παραπάνω σχέση έχει τη μορφή:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{u}{l}$$

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία αυξάνουν και οι μέσες αποστάσεις μεταξύ των μορίων, επομένως μικραίνουν τα μέτρα των διαμοριακών δυνάμεων, και γι' αυτό μικραίνει και το μέτρο της μακροσκοπικής ελκτικής δυνάμεως *F*.
Επομένως *όταν* ***αυξάνει η θερμοκρασία ελαττώνεται το ιξώδες***.

Αυτό ισχύει στην περίπτωση των ***υγρών*** αλλά όχι και των ***αερίων***, στα οποία οι διαμοριακές δυνάμεις είναι από πολύ μικρές μέχρι αμελητέες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες των υγρών. Το ιξώδες των αερίων οφείλεται σε συγκρούσεις μεταξύ των μορίων κατά την κίνησή τους. Η πιθανότητα να συμβεί μια σύγκρουση αυξάνεται με τη θερμοκρασία με αποτέλεσμα ***το ιξώδες να αυξάνει όταν αυξάνει η θερμοκρασία.***

ΥΓΡΑ: $\uparrow T \Rightarrow \uparrow$ διαμοριακές αποστάσεις & $\downarrow$ ελκτικές διαμοριακές δυνάμεις

$\Rightarrow \downarrow F \quad \Rightarrow \downarrow \eta$

ΑΕΡΙΑ: διαμοριακές δυνάμεις πολύ μικρές

$\uparrow T \quad \Rightarrow \Rightarrow$ αύξηση ποσοστού συγκρούσεων $\quad \Rightarrow \uparrow \eta$

Αν εξετασθεί το φαινόμενο ***από ενεργειακή άποψη, θα διαπιστωθεί ότι το ιξώδες προκαλεί μετατροπή μέρους της μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα***.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΙΞΩΔΟΥΣ:

Στο S.I. είναι το Pa·s = 1 N·s/m^2 ή 1 kg/(m·s)

(Στη Γαλλία χρησιμοποιείται το *poiseuille* (Pl) ως Pa·s όχι όμως διεθνώς. Δεν πρέπει να συγχέουμε το poiseuille με το poise που αναφέρεται στο όνομα του ίδιου προσώπου!)

Συνήθως χρησιμοποιείται το ***poise*** **(P)** που πήρε το όνομα του από τον Jean Louis Marie Poiseuille.

Μεταξύ των δύο μονάδων υπάρχει η σχέση **1 Pa·s (**=1 Pl) = **10 P**

Η μοναδα P είναι κατάλληλη για τη μέτρηση του ιξώδους μόνο παχύρευστων υγρών, όπως η γλυκερίνη ή τα ορυκτέλαια.

Για τη μέτρηση των λεπτόρευστων χρησιμοποιείται συνήθως το ***centipoise*** **(cP)** (ιξώδες νερού = 1,0020 cP στους 20 °C).

1 poise = 100 centipoise = 1 g/(cm·s) = 0.1 Pa·s.
1 centipoise = 1 mPa·s.

Τιμές ιξώδους για μερικά κοινά Νευτώνεια ρευστά:

Gases (at 0 °C): **(Pa·s)**

Hydrogen	8.4×10^{-6}
Air	17.4×10^{-6}
Xenon	21.2×10^{-6}

Liquids (at 20 °C): **(Pa·s)**

ethyl alcohol	0.248×10^{-3}
Acetone	0.326×10^{-3}
Methanol	0.597×10^{-3}
propyl alcohol	2.256×10^{-3}
Benzene	0.64×10^{-3}
Water	1.0030×10^{-3}
Nitrobenzene	2.0×10^{-3}
Mercury	17.0×10^{-3}
sulfuric acid	30×10^{-3}
olive oil	81×10^{-3}
castor oil	0.985
Glycerol	1.485
molten polymers	10^{3}
Pitch	10^{7}
Glass	10^{40}

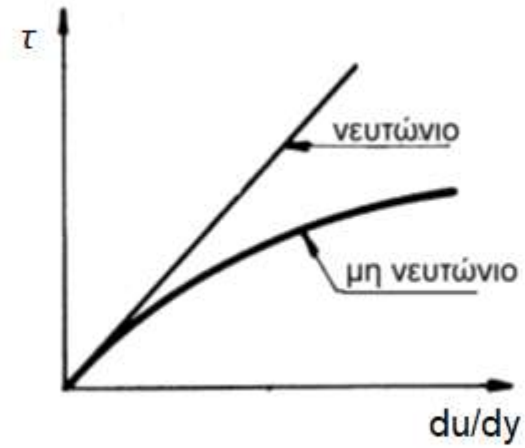
Υγρό	*Θερμοκρασία* (°C)	*Ιξώδες* (10^{-3} Pa·s)
Νερό	0	1,8
	20	1,0
	37	0,7
Αίμα [α]	37	4,0
Πλάσμα αίματος	37	1,5

[α] Εξαρτάται από τον αιματοκρίτη (συγκέντρωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων)

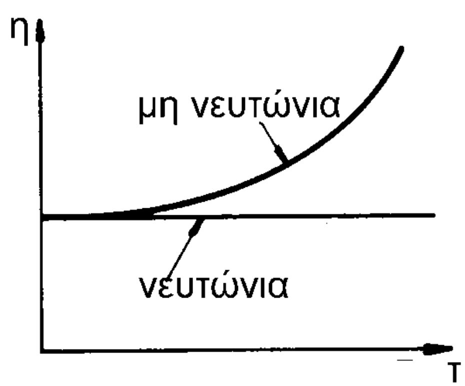
Ρευστά που αποτελούνται από διάφορα στοιχεία, όπως το μέλι, εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία ως προς το ιξώδες τους.

ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ – ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΡΕΥΣΤΑ

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

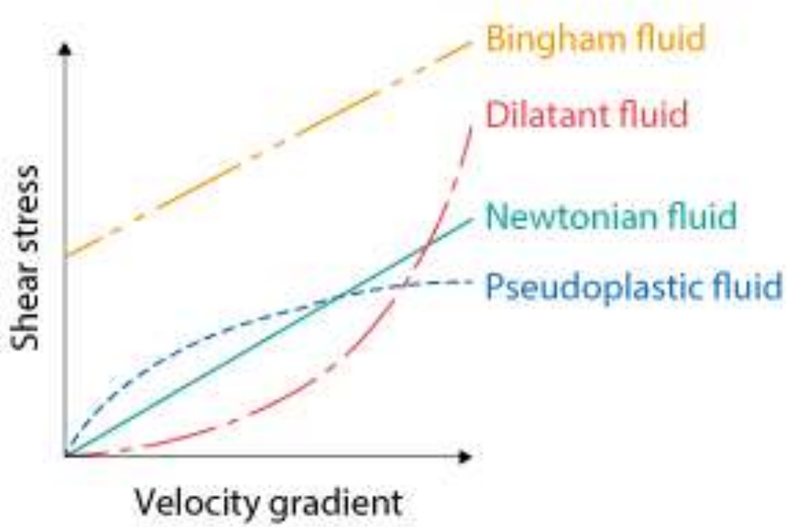


Η γραμμική σχέση του Νεύτωνα ισχύει για μεγάλο αριθμό ρευστών, τα οποία ονομάζονται ***νευτώνεια*** και που είναι τα ***αέρια*** και τα ***λεπτόρευστα υγρά***. Εκτός όμως από αυτά υπάρχει και μια μεγάλη κατηγορία ρευστών για τα οποία η σχέση αυτή αποτελεί απλώς μια προσέγγιση. Τέτοια είναι τα ***παχύρευστα υγρά και τα διαλύματα μακρομορίων***. Σ' αυτά η σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και βαθμίδας ταχύτητας δεν είναι γραμμική, αλλά πολυπλοκότερη. Τα ρευστά αυτά ονομάζονται ***μη νευτώνεια***.



Η συνάρτηση η=f(τ) για νευτώνεια και μη νευτώνεια υγρά

ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ – *ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ* ***ΡΕΥΣΤΑ***



Εκτός από τους δύο αυτούς τύπους ρευστών υπάρχουν και άλλοι με ιδιότυπη συμπεριφορά. Υπάρχουν, π.χ., ρευστά, που μέχρι μία ορισμένη τιμή της διατμητικής τάσεως συμπεριφέρονται σαν στερεά και μετά σαν παχύρευστα μη νευτώνια και ονομάζονται **ψευδοπλαστικά**

ενώ άλλα ρευστά για μικρές βαθμίδες ταχύτητας κινούνται εύκολα και εμφανίζουν μικρό ιξώδες, ενώ για μεγαλύτερες συμπεριφέρονται σαν στερεά, όπως η άμμος, και ονομάζονται **διασταλτικά**.

Παραδείγματα μη-Νευτώνειων ρευστών

Κέτσαπ:
(ιξώδες μειώνεται με αυξανόμενη τάση)

Γιαούρτι
(ιξώδες μειώνεται με τον χρόνο εφαρμογής τάσης)

Γύψος
(ιξώδες αυξάνεται με τον χρόνο εφαρμογής τάσης)

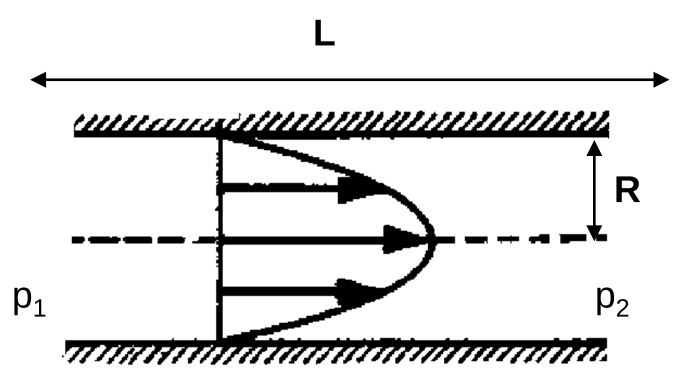
Ο νόμος του Poiseuille

Για στρωτή ροή, η μη σταθερή βαθμίδα ταχύτητας μπορεί να είναι αποτέλεσμα της γεωμετρίας.

Ο Poiseuille έδειξε (αναλυτική περιγραφή μπορείτε να βρείτε στο Παράρτημα Ι, στο τέλος των διαφανειών) ότι η ολική παροχή Q οριζόντιου σωλήνα μήκους L και ακτίνας R, ο οποίος διαρρέεται από ρευστό ιξώδους η, και στα άκρα του οποίου υπάρχουν πιέσεις p_1 και p_2, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4$$

Νόμος του Poiseuille



Ο νόμος του Poiseuille

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4$$

Δείχνει ότι η παροχή όγκου είναι:
- αντιστρόφως ανάλογη προς τον συντελεστή ιξώδους, όπως θα περιμέναμε,
- ανάλογη προς τη βαθμίδα πίεσης $(p_1\text{-}p_2)/L$
- ανάλογη της *τέταρτης δύναμης* της ακτίνας R.

Αν ο σωλήνας δεν είναι οριζόντιος, αλλά μεταξύ των άκρων του υπάρχει υψομετρική διαφορά h, πρέπει να ληφθεί υπόψη και η υδροστατική πίεση, η οποία επίσης επιδρά στην κίνηση του ρευστού και έτσι ο νόμος του Poiseuille παίρνει τη μορφή:

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\left(\frac{p_1 - p_2}{L} + \frac{\rho g h}{L}\right)R^4$$

Ο νόμος του Poiseuille

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4$$

Για να είναι η παροχή *Q* μη μηδενική, για να κινηθεί δηλαδή το ρευστό μέσα στο σωλήνα, πρέπει να υπάρχει και διαφορά πιέσεως Δ*p* ή βαθμίδα πιέσεως Δ*p*/L μη μηδενική. Η βαθμίδα πιέσεως μπορεί να οφείλεται είτε σε διαφορετικές στατικές πιέσεις στα άκρα του σωλήνα, είτε σε διαφορετική υδροστατική πίεση, είτε και στα δύο.

Καθημερινές εφαρμογές

-Σχεδιασμός υδραυλικών συστημάτων και υποδερμικών βελόνων (υποδιπλασιασμός της διαμέτρου της βελόνας ισοδυναμεί σε16πλασια δύναμη του αντίχειρα.

-Η ροή του αίματος στις αρτηρίες και στις φλέβες, με σχετικά μικρές μεταβολές στη διάμετρο τους, μπορεί να κυμανθεί σε μια ευρεία κλίμακα. Αυτό συνιστά σημαντικό μηχανισμό θερμοκρασιακού ελέγχου στα θερμόαιμα ζώα.

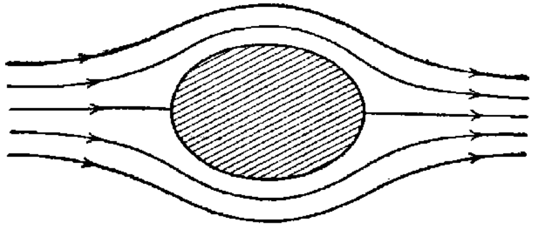
-Σχετικά ασήμαντη στένωση των αρτηριών από αρτηριοσκλήρωση μπορεί να προκαλέσει πρόσθετη καταπόνηση των καρδιακών μυών.

Η αντίσταση κατά την κίνηση στερεού μέσα σε ρευστό

Όταν στερεό κινείται σε σχέση με πραγματικό ρευστό, ασκείται επάνω του δύναμη, που αντιτίθεται στην κίνησή του και η οποία ονομάζεται **αντίσταση**. Η αντίσταση εξαρτάται από το ρευστό και τη σχετική ταχύτητα ρευστού-στερεού, είναι δε η συνισταμένη των δυνάμεων τις οποίες δέχονται τα στοιχειώδη τμήματα της επιφάνειας του στερεού, λόγω των δυνάμεων συνάφειας ρευστού-στερεού. Η τιμή της αντιστάσεως προσδιορίζεται από διαφορετικούς νόμους, ανάλογα με την τιμή της σχετικής ταχύτητας.
Ας θεωρήσουμε ότι το στερεό είναι ακίνητο μέσα σε κινούμενο ρευστό. Όταν η σχετική ταχύτητα είναι μικρή, η ροή του ρευστού είναι στρωτή και έχει τη μορφή του σχήματος. Το στρώμα του ρευστού που εφάπτεται στο στερεό είναι ακίνητο ως προς αυτό λόγω των δυνάμεων συνάφειας. Επομένως το στερεό και το στρώμα αυτό του ρευστού κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Τα άλλα στρώματα κινούνται "παράλληλα" προς το εφαπτομενικό στρώμα, με ταχύτητα που τείνει να αυξηθεί όσο απομακρυνόμαστε από το στερεό.
Το ρευστό τείνει να παρασύρει το στερεό κατά την κίνησή του, ασκώντας επάνω του δύναμη, την **αντίσταση** η οποία (για μικρές ταχύτητες) είναι ανάλογη του συντελεστή ιξώδους η, της σχετικής ταχύτητας υ και μιας γραμμικής διαστάσεως του στερεού d:

$$F = \mathrm{k}\eta\upsilon d$$

Όταν το στερεό είναι σφαίρα η σχέση αυτή γίνεται:



$$F = 6\pi\eta R\upsilon$$

όπου R η ακτίνα της σφαίρας.

Η σχέση αυτή ονομάζεται **νόμος του Stokes**

Πτώση σφαίρας σε ρευστό

Έστω ότι σφαίρα ακτίνας R, μάζας m και πυκνότητας ρ_σ αφήνεται να πέσει σε ρευστό πυκνότητας ρ_ρ και ιξώδους η. Κατά την πτώση ασκούνται επάνω της το βάρος της W, η άνωση F_B εκ μέρους του ρευστού και η αντίσταση $F_{αντιστ.}$, λόγω της κινήσεώς της μέσα σ' αυτό. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών προσδίδει στη σφαίρα επιτάχυνση α που υπολογίζεται από τη σχέση: $m \cdot \alpha = W - F_B - F_{αντιστ.}$ με

$$W = V\rho_\sigma g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\sigma g \qquad F_B = V\rho_\rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\rho g$$

όπου V ο όγκος της σφαίρας και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η αντίσταση του ρευστού, σύμφωνα με το νόμο του Stokes, είναι:

$F_{αντιστ.} = 6\pi \eta R \upsilon$

Έτσι, προκύπτει ότι η επιτάχυνση α είναι: $\alpha = \frac{1}{m}(W - F_\mathrm{B} - F_{αντιστ}) = \left(1 - \frac{\rho_\rho}{\rho_\sigma}\right) g - \frac{9\eta\upsilon}{2\rho_\sigma R^2}$

Από τη σχέση αυτή διαπιστώνεται ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα υ της σφαίρας μικραίνει η επιτάχυνση της α, η οποία κάποια στιγμή θα μηδενισθεί. Τότε η ταχύτητα είναι η μέγιστη δυνατή, ονομάζεται **ορική ταχύτητα** και από την προηγούμενη σχέση υπολογίζεται:

$$\upsilon_{ορικη} = \frac{2R^2(\rho_\sigma - \rho_\rho)g}{9\eta}$$

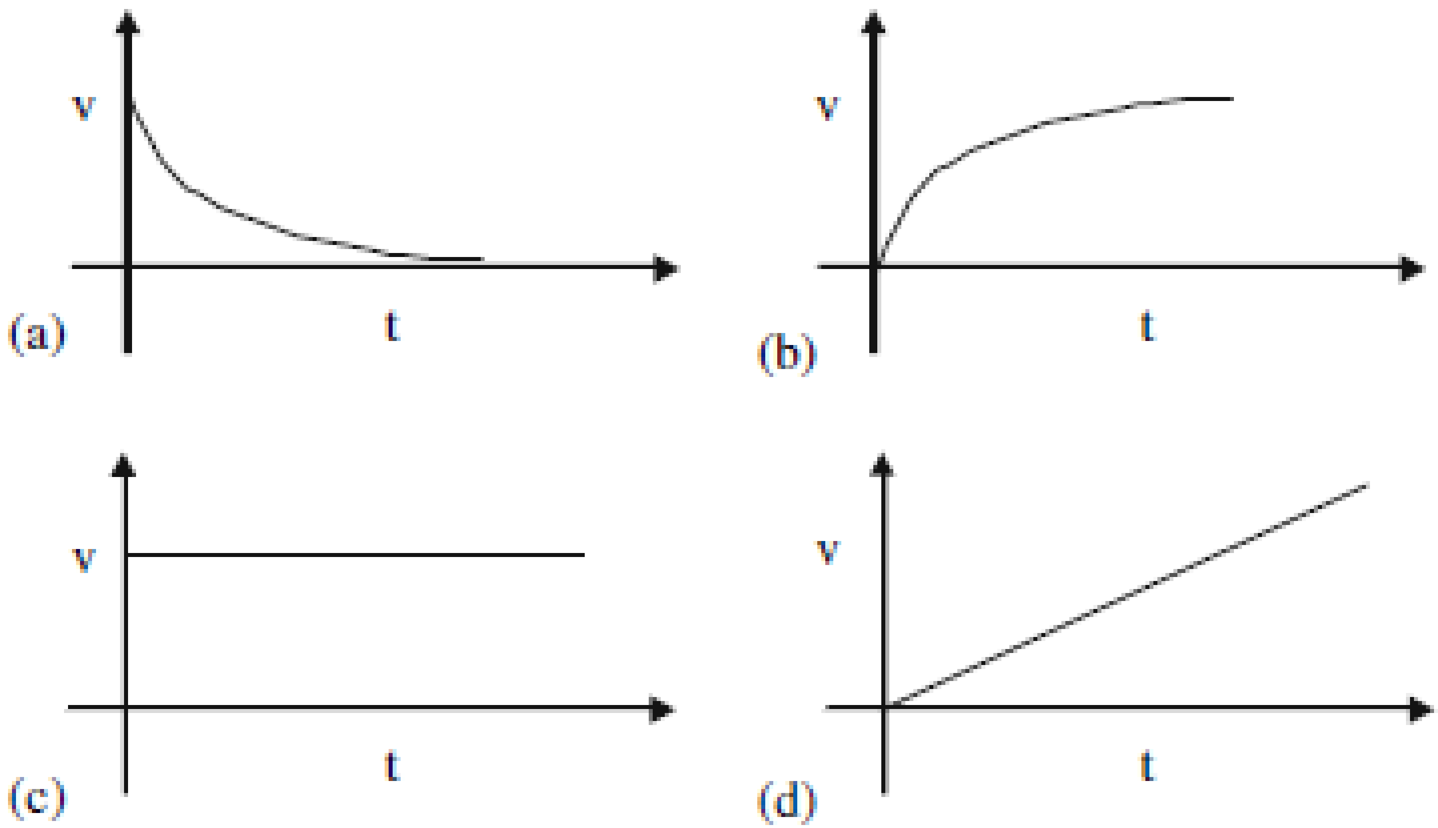
Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται συχνά στη φύση.

Π.χ. ορική ταχύτητα αποκτούν οι σταγόνες της βροχής όταν πέφτουν μέσα στον αέρα και γι' αυτό δεν βλάπτουν τα έμβια όντα.

Ορική είναι και η τελική ταχύτητα πτώσης των αλεξιπτωτιστών.

ΕΡΩΤΗΣΗ Πολ. Επιλ.

Ένα σώμα αφήνεται από ηρεμία σε t = 0 να πέσει μέσα σε ιξώδες ρευστό. Ποιο από τα διαγράμματα περιγράφει καλύτερα την ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο;



Δείτε video: Felix Baumgartner's Stratosphere Jump
(Σύνδεσμοι → Κατηγορίες συνδέσμων → Ρευστά - Ιξώδες

ΑΣΚΗΣΗ

Πόση ταχύτητα πρέπει να έχει μια χρυσή σφαίρα ακτίνας 6,00mm μέσα σε καστορέλαιο (ρετσινόλαδο) στους 20°C, ώστε η αντίσταση που υφίσταται να ισούται με το ¼ του βάρους της σφαίρας;

Δίνονται:

- Ο συντελεστής ιξώδους του ρετσινόλαδου είναι 9,86 poise στη θερμοκρασία αυτή
- 1 poise = 1 $dyn \cdot s/cm^2$ (1 dyn = 1 $g \cdot cm/s^2$)
- Νόμος Stokes: $F_{αν} = 6πηr_{σφ}υ$

$\rho_{χρυσ.} = 19{,}3 \times 10^3\ kg/m^3$

$r_{σφαιρ.} = 6mm = 6 \times 10^{-3}\ m$

$\eta_{ρετσ.} = 9{,}86\ poise = 9{,}86 \times 10^{-1}\ N \cdot s/m^2$

$$F_{αν} = \frac{W_{σφαιρ.}}{4} \quad (1)$$

Νόμος Stokes: $F_{αν} = 6\pi \eta r_{σφαιρ.} \upsilon$ (2)

Από (1) και (2): $6\pi \eta r_{σφαιρ.} \upsilon = \dfrac{m_{σφ.} g}{4}$ (3)

$$m_{σφαιρ.} = \rho_{χρυσ.} V_{σφαιρ.}$$

$$V_{σφαιρ.} = \frac{4}{3}\pi r^3_{σφαιρ.} \quad (4)$$

$$Επομένως: m_{σφαιρ.} = \frac{4}{3}\pi \rho_{χρυσ.} r^3_{σφαιρ.}$$

Από (3) και (4): $\upsilon = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \rho_{χρυσ.} r^3_{σφαιρ.} g}{4 \cdot 6\pi \eta r_{σφαιρ.}} = \dfrac{\rho_{χρυσ.} r^2_{σφαιρ.} g}{18\eta} \simeq 0{,}385\, m/s$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια χάλκινη σφαίρα με μάζα 0,2 g πέφτει με οριακή ταχύτητα 5,0 cm/s μέσα σε άγνωστο ρευστό. Αν η πυκνότητα του χαλκού είναι 8900 kg/m^3 και του ρευστού 2800 kg/m^3, πόσος είναι ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού (σε poise);

1 poise = 1 dyn·s/cm^2 (1 dyn = 1 g·cm/s^2)

$m_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.} = 0{,}2\text{g} = 0{,}2 \times 10^{-3}$ kg

$\upsilon_{op.} = 5\text{cm/s} = 5\times 10^{-2}$ m/s

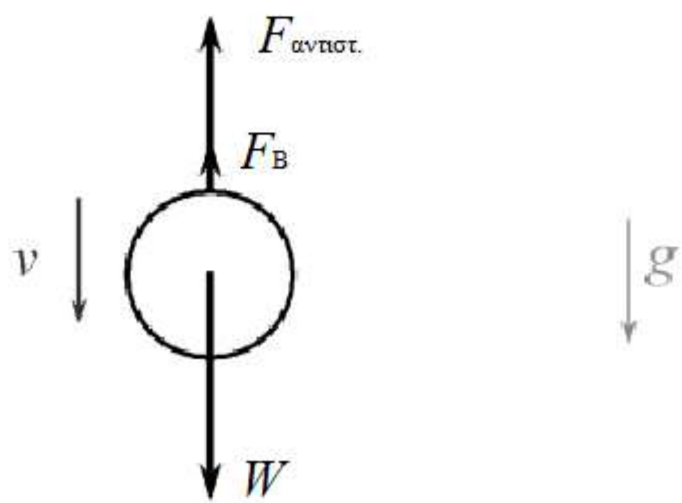
$\rho_{\chi\alpha\lambda\kappa.} = 8900 \text{ kg/m}^3 = 8{,}9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\rho_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau.} = 2{,}8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\upsilon_{o\rho\iota\kappa\acute{\eta}}$ όταν: $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{W} + \vec{F_B} + \overrightarrow{F_{\alpha\nu\tau.}} = \vec{0}$ *Σε αλγεβρική μορφή:* $F_{\alpha\nu\tau.} + F_B - W = 0$ (1)

$$V_{\sigma\phi.} = \frac{m_{\sigma\phi.}}{\rho_{\chi\alpha\lambda\kappa.}} = \frac{0,2\times10^{-3}kg}{8,9\times10^{3}\,kg/m^{3}} \simeq 2,25\times10^{-8}m^{3}$$

$$V_{\sigma\phi.} = \frac{4}{3}\pi r_{\sigma\phi.}^{3} \Rightarrow r_{\sigma\phi.} = \sqrt[3]{\frac{3V_{\sigma\phi.}}{4\pi}m^{3}} = \sqrt[3]{5,37\times10^{-9}m^{3}} \simeq 1,75\times10^{-3}m$$



Από (1):

$$6\pi\eta r_{\sigma\phi.}\upsilon_{o\rho.} + \rho_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau.}V_{\sigma\phi.}g - m_{\sigma\phi.}g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\left(m_{\sigma\phi.} - \rho_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau.}V_{\sigma\phi.}\right)g}{6\pi r\upsilon_{o\rho.}} = 0,083N\,s/m^{2} = 0,83\,poise$$

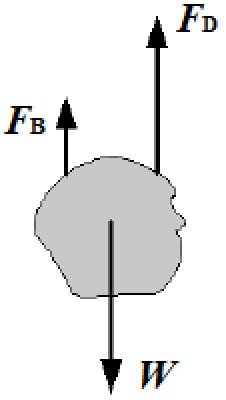
ΑΣΚΗΣΗ

Ένα κομμάτι πάγου (χαλάζι) πέφτει ξεκινώντας από την ηρεμία μέσα στον ατμοσφαιρικό αέρα του οποίου η πυκνότητα δίνεται. Αν η δύναμη της αντίστασης δίνεται ως:

$$F_D = \frac{1}{5} C_D V \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \upsilon^2$$

με μέση τιμή του συντελεστή αντίστασης $C_D = 0{,}45$, υπολογίστε την ορική του ταχύτητα. (Δίνονται: $g = 10$ m/s^2. Οι πυκνότητες ατμοσφαιρικού αέρα $\rho_{\alpha\varepsilon\rho} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3 και πάγου $\rho_{\pi\alpha\gamma} = 0{,}92$ g/cm^3

ΛΥΣΗ



$\upsilon = \upsilon_{\text{ορική}}$ όταν: $F_D + F_B - W = 0$ (1)

Γνωρίζουμε ότι: $W = mg = \rho_{\pi\alpha\gamma} \cdot V \cdot g$ και $F_B = \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \cdot V \cdot g$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\frac{1}{5} C_D V \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \upsilon^2{}_{o\rho} + \rho_{\alpha\varepsilon\rho} V g - \rho_{\pi\alpha\gamma} V g = 0 \Longrightarrow$$

$$\upsilon^2{}_{o\rho} = \frac{5(\rho_{\pi\alpha\gamma} - \rho_{\alpha\varepsilon\rho}) g}{C_D \rho_{\alpha\varepsilon\rho}} = \frac{5(920 - 1{,}2)10}{0{,}45 \cdot 1.2} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \Longrightarrow \upsilon_{o\rho} = 291{,}7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια χρυσή σφαίρα ακτίνας R αφήνεται από ηρεμία να πέσει στην επιφάνεια καστορέλαιου ιξώδους η, που περιέχεται σε αρκετά μεγάλο δοχείο στους 20°C. Ποια είναι η επιτάχυνση της σφαίρας όταν αυτή έχει i) $\upsilon = \upsilon_{\text{ορική}}$, ii) $\upsilon = \upsilon_{\text{ορική}}/2$

(Δίνονται: $\rho_{\text{χρυσού}} = \rho_\chi = 19{,}3$ g/cm^3, $\rho_{\text{καστορέλαιου}} = \rho_\kappa = 0{,}9$ g/cm^3, $V_{\text{σφαιρας}} = V = (4/3)\,\pi R^3$)

ΛΥΣΗ

(i) $\alpha = 0$ (από τον ορισμό της ορικής ταχύτητας)

(ii) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\sum F = m\cdot\alpha \Rightarrow F_{\text{αντιστ}} + F_B - W = m\cdot\alpha$ (1)

Σύμφωνα με το νόμο του Stokes για πτώση σφαίρας ακτίνας R σε ρευστό ιξώδους η και πυκνότητας ρ: $F_{\text{αντιστ}} = 6\pi\eta R\upsilon$, οπότε για την περίπτωση του ερωτήματος:

$$F_{\text{αντιστ}} = 6\pi\eta R(\upsilon_{\text{ορ}}/2) \qquad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι η σφαίρα θα αποκτήσει ορική ταχύτητα όταν $F_{\text{αντιστ, ορικ}} + F_B - W = 0$ από όπου

προκύπτει (βλέπε στα προηγούμενα) ότι: $$\upsilon_{\text{ορ}} = \frac{2R^2(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{9\eta} \qquad (3)$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας, μπορούμε να εκφράσουμε το R^3 από τη σχέση $V = (4/3)\,\pi R^3 \Rightarrow R^3 = (3V)/4\pi$. Οπότε από (2) και (3) έχουμε:

$$F_{\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau} = \frac{V(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1): $$\frac{V(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{2} + \rho_\kappa V g - \rho_\chi V g = \rho_\chi V \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{2\rho_\chi} \Rightarrow$$

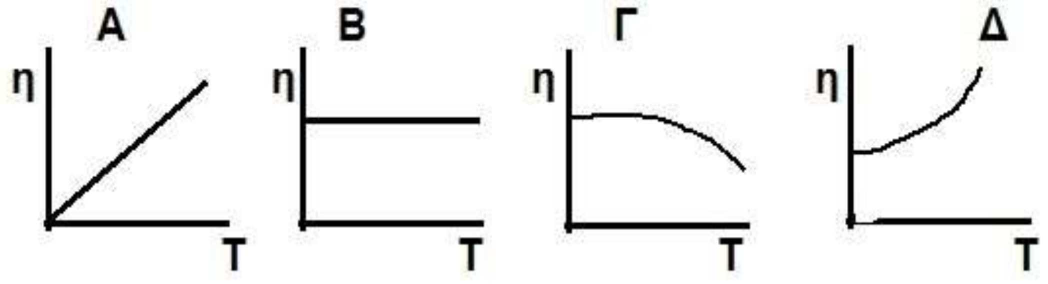
$$\Rightarrow \alpha = \frac{-(19{,}3 - 0{,}9)\cdot 10}{2\cdot 19{,}3}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -4{,}77\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Βγαίνει αρνητική (αναμενόμενο) γιατί έχει την κατεύθυνση της g

Παλαιό θέμα εξετάσεων

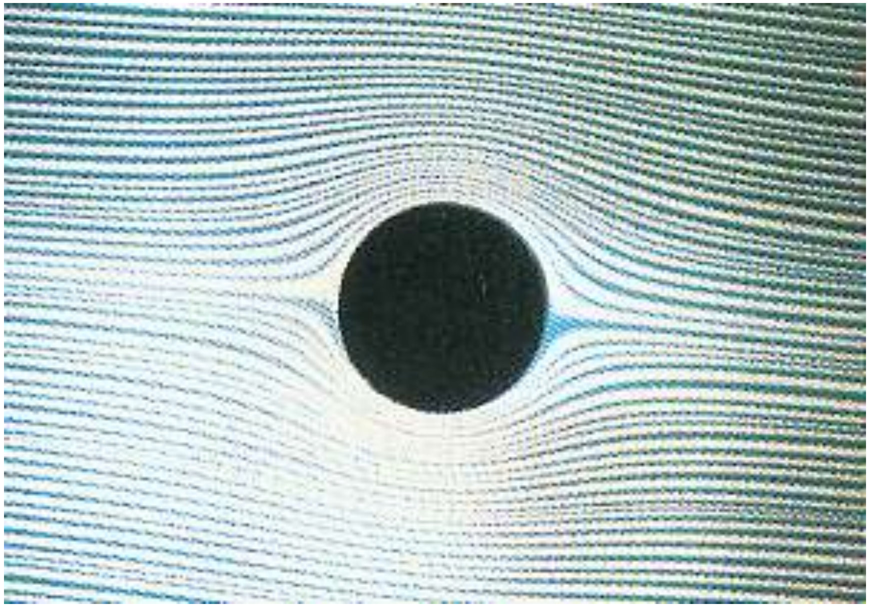
α) Γιατί το κέτσαπ ρέει από το μπουκάλι μόνο αφού το χτυπήσουμε;
Τι είδους ρευστό είναι το κέτσαπ;

β) Ποια από τις παρακάτω καμπύλες για το ιξώδες (η) σε συνάρτηση με την τάση (Τ) αντιστοιχεί στο κέτσαπ;



Τυρβώδης ροή

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τη ροή ιξώδων ρευστών για περιπτώσεις που η διατμητική τάση μεταξύ των στρωμάτων τους είναι μικρή. Αν η διατμητική αυτή τάση είναι μεγαλύτερη, παρατηρείται τυρβώδης ροή, η εικόνα της οποίας είναι πολύ διαφορετική από αυτή της στρωτής ροής. Στην τυρβώδη ροή, τα αποτελέσματα της εσωτερικής τριβής είναι ακόμη πιο έντονα εξαιτίας του σχηματισμού στροβίλων και ο ρυθμός παραμόρφωσης $\Delta v/\Delta r$ κοντά στα τοιχώματα είναι πολύ μεγαλύτερος



Η εικόνα της τυρβώδους ροής είναι εξαιρετικά ακανόνιστη και πολύπλοκή και μεταβάλλεται διαρκώς με την πάροδο του χρόνου (ακανόνιστη, χαοτική ροή).

Τυρβώδης ροή

Το είδος της ροής (μόνιμη ή τυρβώδης) εξαρτάται *από την ταχύτητα του ρευστού v, το είδος του πεδίου ροής, την πυκνότητα ρ και το ιξώδες η του ρευστού*.

Οι παράγοντες αυτοί υπεισέρχονται σε ένα αδιάστατο μέγεθος το οποίο χαρακτηρίζει τη ροή και ονομάζεται **αριθμός του Reynolds**:

$$\Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

όπου *L* μία γραμμική γεωμετρική διάσταση που καθορίζεται από το είδος της ροής.
π.χ.
Αν το ρευστό κινείται μέσα σε κυλινδρικό σωλήνα, *L* είναι η ακτίνα του ή η διάμετρός του.
Αν σωματίδιο κινείται μέσα σε ρευστό, *L* είναι το χαρακτηριστικό μέγεθος του σωματιδίου.

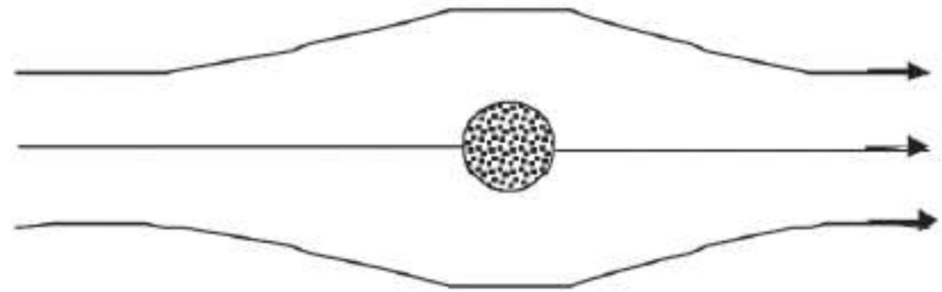
Τυρβώδης ροή

$$\Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

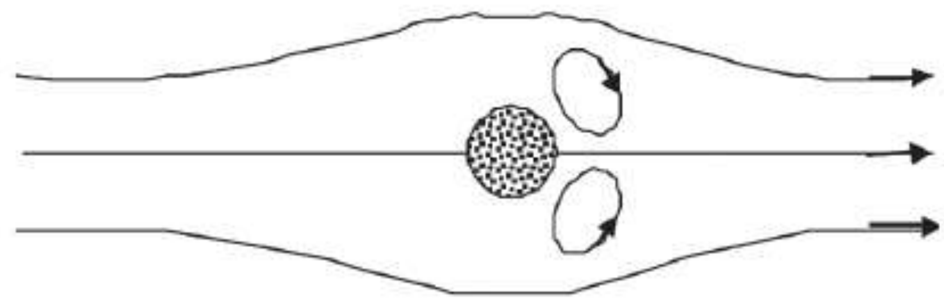
Υπάρχει μία τιμή του αριθμού του Reynolds, που χαρακτηρίζει τη ροή, και η οποία ονομάζεται **κρίσιμος αριθμός του Reynolds** $R_{\kappa\rho}$.

Για $R > R_{\kappa\rho}$ η ροή είναι τυρβώδης, ενώ για μικρότερες μόνιμη.

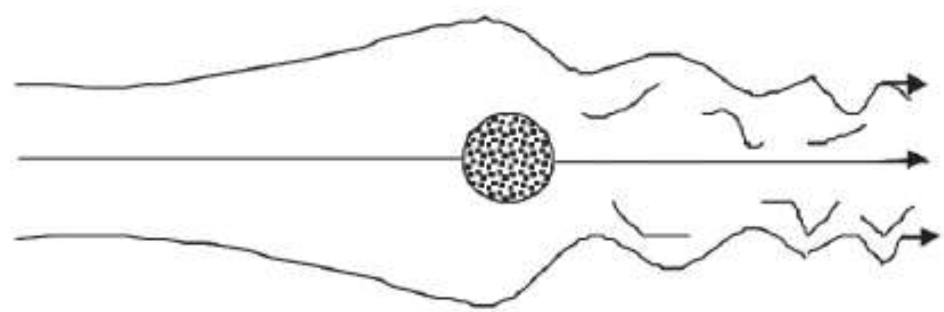
Κατά τη ροή ρευστού σε σωλήνα η κρίσιμη τιμή $R_{\kappa\rho}$ είναι 2000 ενώ κατά την κίνηση της σφαίρας σε ρευστό μόλις 10. Με τη βοήθεια του αριθμού του Reynolds μπορεί να καθοριστεί για δεδομένο υγρό και δεδομένο είδος ροής ποιά είναι η **κρίσιμη ταχύτητα** πάνω από την οποία η ροή γίνεται τυρβώδης.



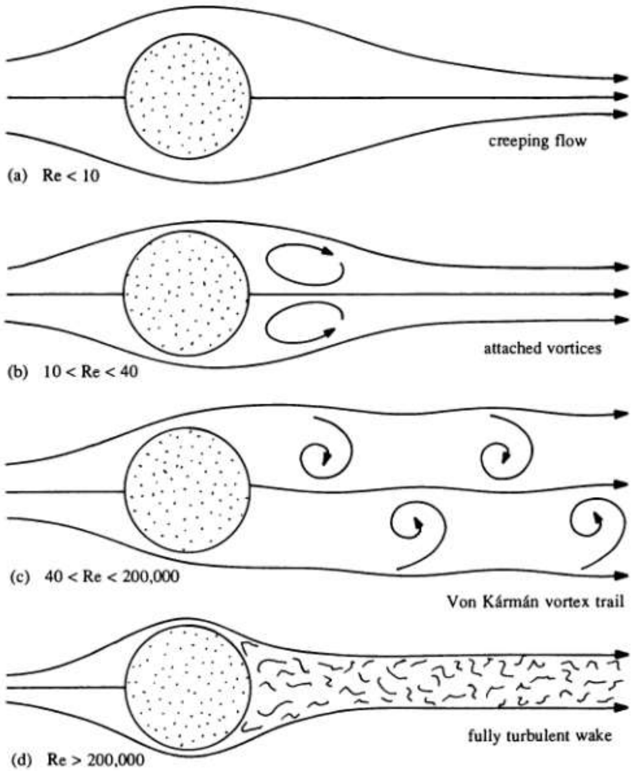
Δύναμη τριβής από *Νόμο Stokes*: $F = -6\pi\,\eta\, r\, v$

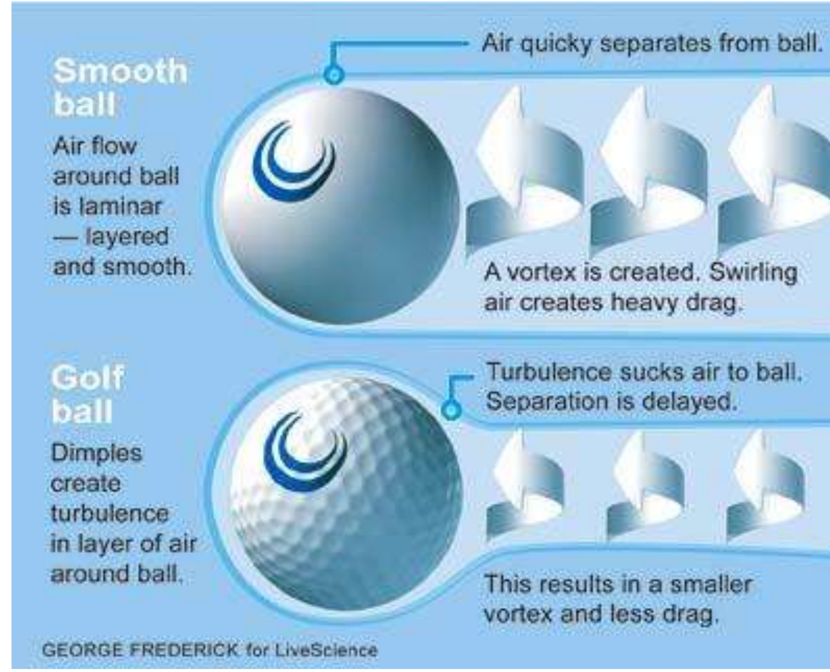


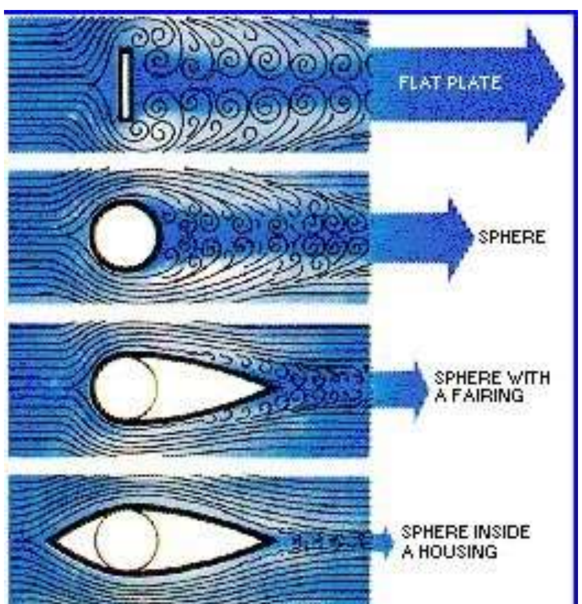
Δύναμη τριβής ανάλογη του v^2



τυρβώδης

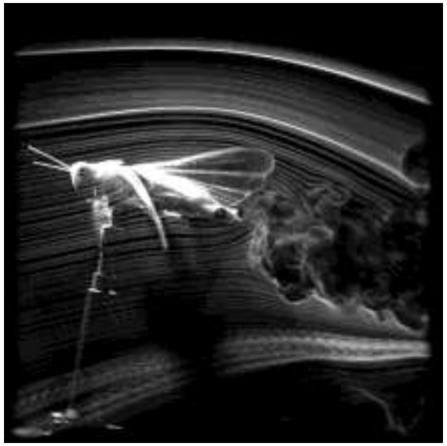

creeping flow
(a) Re < 10
attached vortices
(b) 10 < Re < 40
(c) 40 < Re < 200,000
Von Kármán vortex trail
fully turbulent wake
(d) Re > 200,000

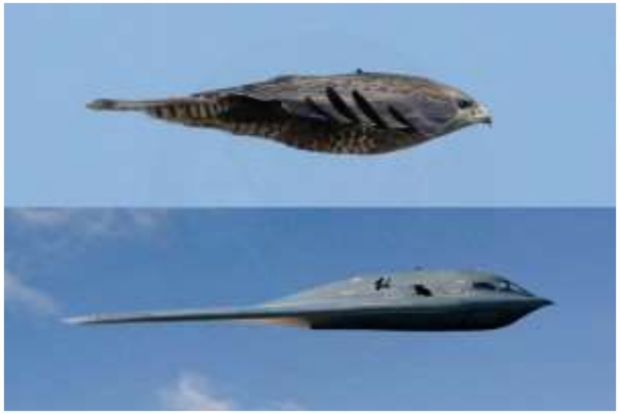

Smooth ball
Air flow around ball is laminar — layered and smooth.
Air quicky separates from ball.
A vortex is created. Swirling air creates heavy drag.
Golf ball
Dimples create turbulence in layer of air around ball.
Turbulence sucks air to ball. Separation is delayed.
This results in a smaller vortex and less drag.
GEORGE FREDERICK for LiveScience

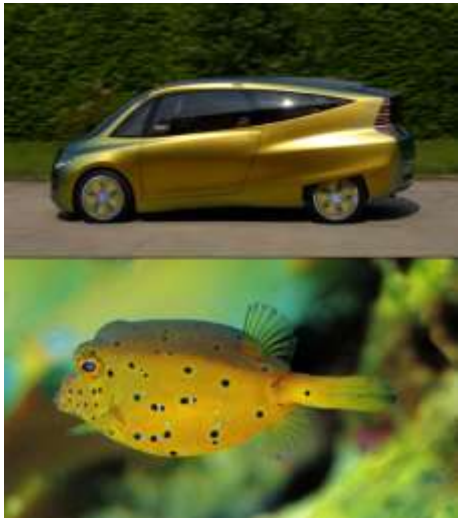

FLAT PLATE
SPHERE
SPHERE WITH A FAIRING
SPHERE INSIDE A HOUSING

Με προσεκτικό σχεδιασμό του σχήματος ενός σώματος, αυτές οι δυνάμεις τριβής μπορούν να μειωθούν. Σημαντική βελτίωση έχει επιτευχθεί στις αεροδυναμικές επιδόσεις αυτοκινήτων και αεροπλάνων που έχουν σχεδιαστεί από μηχανικούς κατά αυτόν τον τρόπο.

Στον κόσμο των ζώων, ο εξελικτικός σχεδιασμός έχει επίσης οδηγήσει σε τέτοιες μορφές, με σχήματα ευνοϊκής υδροδυναμικής και αεροδυναμικής, ειδικά στις περιπτώσεις πολλών υδρόβιων και ιπτάμενων ζώων.







Ιξώδες εναιωρήματος σωμάτων σε ρευστό

Όταν περισσότερα από ένα σώματα βρίσκονται σε ένα ρευστό το αυλάκι ασταθούς ροής που δημιουργείται πίσω από ένα σώμα μπορεί να αλληλεπιδράσει με άλλα σώματα μέσω των λεγόμενων *υδροδυναμικών αλληλεπιδράσεων*.

Αϊνστάιν (1906), προσδιόρισε το ιξώδες εναιωρήματος όμοιων σφαιρικών σωματιδίων η_s ως:

$$\eta_s = \eta_0 (1 + 2{,}5\Phi)$$

όπου η_o είναι το ιξώδες του διαλύτη και Φ είναι το ποσοστό του όγκου που καταλαμβάνεται από τα σφαιρικά σωμάτια.

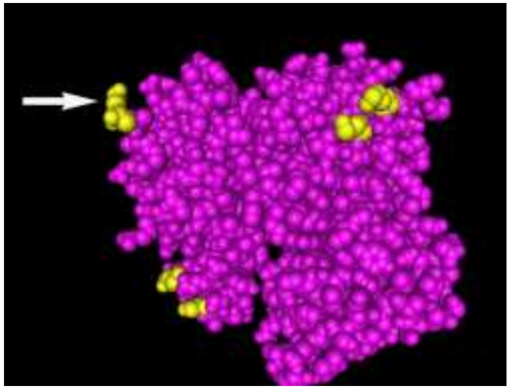
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

• Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την ακτίνα των σωματιδίων. Όσο μεγαλύτερα είναι τα σφαιρικά σωματίδια τόσο λιγότερα απαιτούνται για να καταλάβουν ένα συγκεκριμένο ποσοστό του συνολικού όγκου και επομένως η τιμή του ιξώδους του εναιωρήματος θα είναι η ίδια.

• Για σωματίδια άλλων σχημάτων ο παράγοντας 2,5 αντικαθίσταται από έναν άλλο αριθμητικό παράγοντα που εξαρτάται από το σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υπολογίστε το ιξώδες υδατικού διαλύματος 100 μM σφαιρικών πρωτεϊνών ακτίνας 5 nm και μοριακής μάζας 40.000 στους 20°C. Τέτοιο θα μπορούσε να είναι ένα διάλυμα της σφαιρικής πρωτεΐνης ακτίνης. ($\eta_o = 10^{-3}$ Pa · s για το νερό)



Λύση:

Υπολογίζουμε το κλάσμα του όγκου που καταλαμβάνει η πρωτεΐνη.

Κάθε πρωτεϊνικό μόριο καταλαμβάνει όγκο (4/3) π $r^3 = 5{,}2 \times 10^{-25}$ m^3

Από τη συγκέντρωση του Δ/τος γνωρίζουμε ότι σε 1 L Δ/τος υπάρχουν 100 · 10^{-6} mol ακτίνης, επομένως,

σε 1 m^3 υπάρχουν περίπου $10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}$ mol = 10^{-1} mol ή

$10^{-1} \cdot N_A = 6{,}022 \times 10^{22}$ μόρια (N_A: ο αριθμός Avogadro),

που καταλαμβάνουν όγκο $(6{,}022 \times 10^{22})\ (5{,}2 \times 10^{-25}) = 0{,}03$ m^3.

Έτσι, το κλάσμα του όγκου είναι Φ = 0,03 και το ιξώδες υπολογίζεται (δεδομένου ότι $\eta_o = 10^{-3}$ Pa · s για το νερό):

$$\eta = [1 + (2{,}5)(0{,}03)] \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1{,}075 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Η τιμή αυτή είναι αυξημένη κατά 7,5% συγκριτικά με αυτή του καθαρού νερού.

ΑΙΜΑ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

✓ Ο όρος “σύνθετα ρευστά” χρησιμοποιείται συνήθως για τα μη-Νευτώνεια ρευστά όπου η διατμητική τάση δεν είναι ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης.

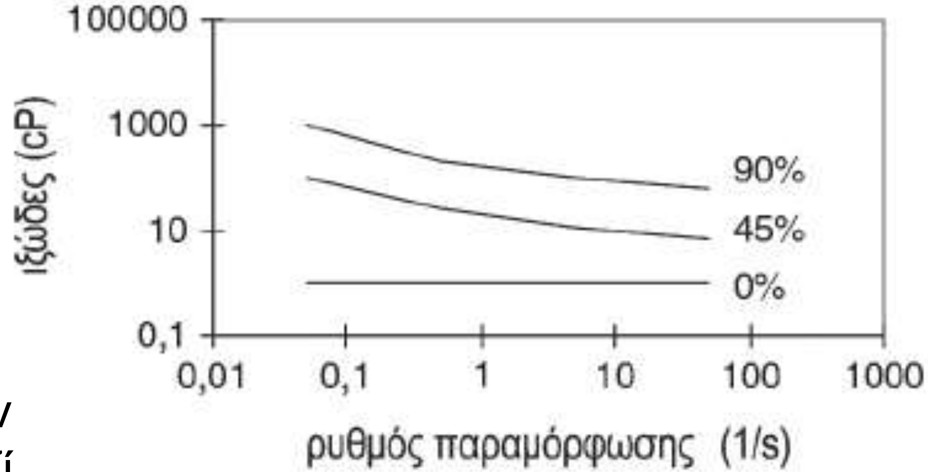
✓ Τα περισσότερα βιολογικά ρευστά, συμπεριλαμβανομένου του αίματος, είναι σύνθετα.

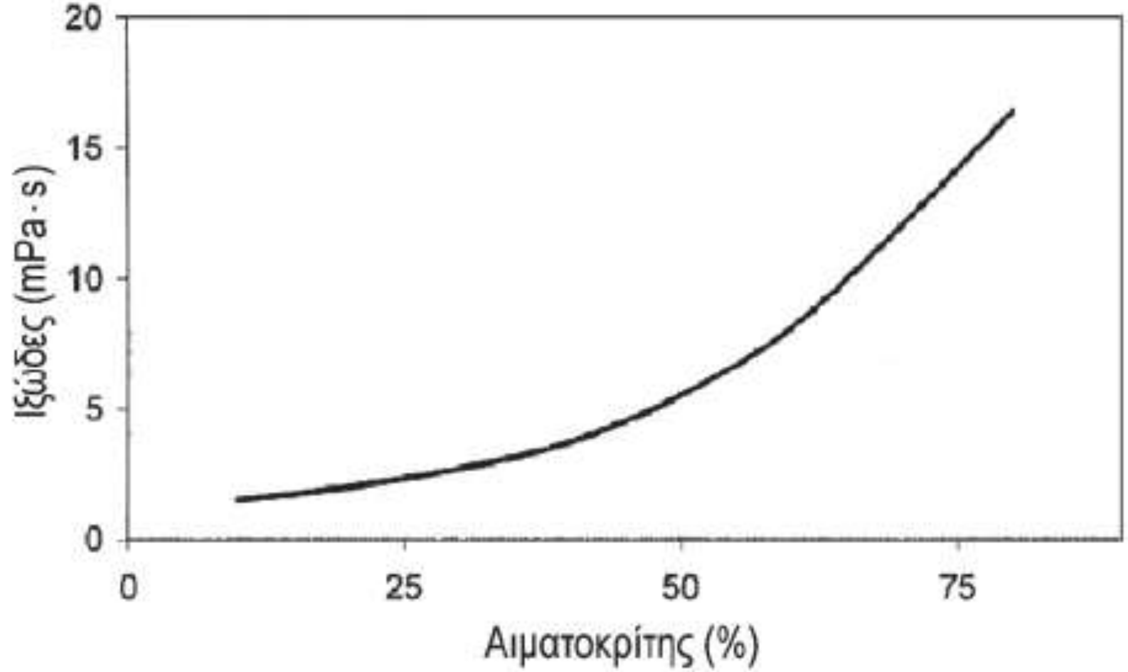
✓ Ακόμη και απλά εναιωρήματα ασύμμετρων μακρομορίων είναι μη-Νευτώνεια εξαιτίας του προσανατολισμού που αποκτούν τα μακρομόρια σε μεγάλους ρυθμούς παραμόρφωσης: μεγάλες εγκάρσιες μεταβολές της ταχύτητας δημιουργούν ροπές σε τέτοια μόρια οι οποίες τείνουν να τα ευθυγραμμίσουν με τη ροή του ρευστού, ακριβώς όπως μια ράβδος ευθυγραμμίζεται με τη ροή σε ένα ταχέως κινούμενο ρεύμα. Άλλα σύνθετα βιολογικά “ρευστά” είναι το κυτταρικό κυτόπλασμα το οποίο έχει ιξωδοελαστικές ιδιότητες και οι βιολογικές μεμβράνες οι οποίες εμφανίζουν στις 2 διαστάσεις ιδιότητες σαν αυτές των ρευστών.

Το ***πλάσμα*** του αίματος είναι νευτώνειο ρευστό, επειδή το ιξώδες του είναι ανεξάρτητο του ρυθμού παραμόρφωσης (κάτω καμπύλη).

Οι μη-νευτώνειες ρεολογικές ιδιότητες του αίματος οφείλονται κυρίως στα ***ερυθρά αιμοσφαίρια*** που παρουσιάζουν την τάση να συσσωρεύονται μαζί σε στοίβες όπως τα νομίσματα (***διατάξεις rouleaux).*** Η έκταση της συσσωμάτωσης εξαρτάται ισχυρά από το ρυθμό παραμόρφωσης. Οι στοίβες σπάνε όταν ο ρυθμός παραμόρφωσης αυξάνεται αρκετά, γεγονός που εξηγεί ποιοτικά τη μείωση του ιξώδους με την αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης.

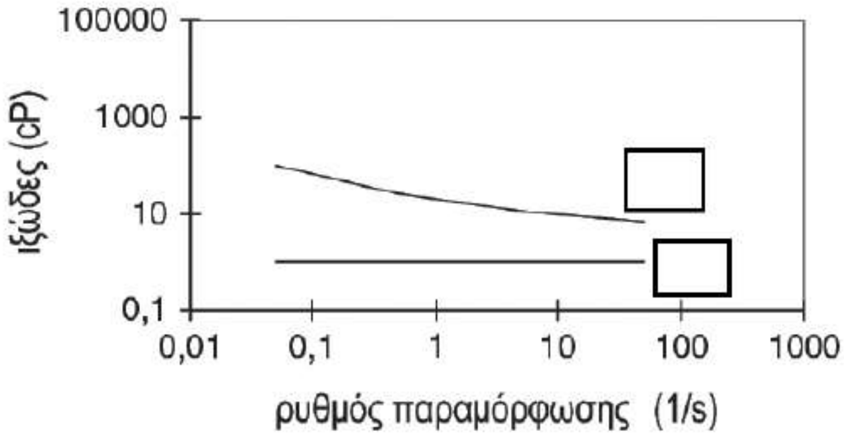
(πάνω διάγραμμα)





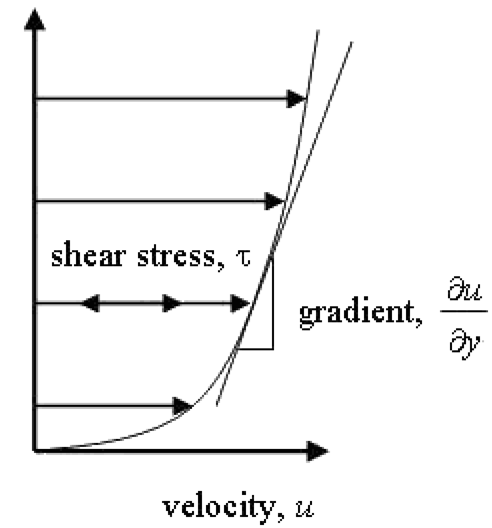
ΘΕΜΑ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

β) Στα τετράγωνα του διπλανού σχήματος συμπληρώστε τις τιμές του αιματοκρίτη (0% ή 45%) για τις αντίστοιχες καμπύλες. Σε ποιά περίπτωση έχουμε συμπεριφορά νευτώνειου ρευστού; Τι θα συνέβαινε αν τα ερυθρά αιμοσφαίρια συμπεριφέρονταν σαν άκαμπτα σφαιρίδια;



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I

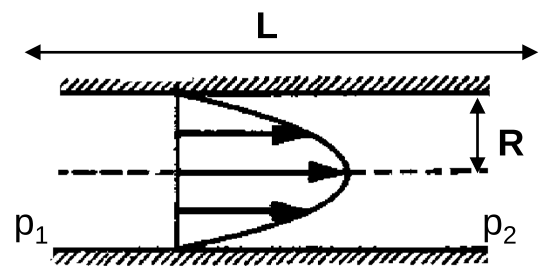
Ο νόμος του Poiseuille



Για στρωτή ροή, η μη σταθερή βαθμίδα ταχύτητας μπορεί να είναι αποτέλεσμα της γεωμετρίας.

Απλούστερο παράδειγμα: το διάγραμμα ταχυτήτων της ροής ενός ιξώδους ρευστού σε κυλινδρικό σωλήνα. Η ταχύτητα είναι μέγιστη κατά μήκος του άξονα και μηδενική στα τοιχώματα του σωλήνα. Το ρευστό μοιάζει με σύστημα ομοαξονικών τηλεσκοπικών σωλήνων που ολισθαίνουν μεταξύ τους ώστε ο κεντρικός να κινείται με τη μεγαλύτερη ταχύτητα, ενώ ο ακραίος ακινητεί.

Έστω σωλήνας μήκους L και ακτίνας R, στα άκρα του οποίου επικρατούν πιέσεις p_1 και p_2. ' Έστω ακόμα κυλινδρικό στρώμα ρευστού ακτίνας r και ομοαξονικό του κυλίνδρου, που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ, γεγονός από το οποίο εξάγεται το συμπέρασμα ότι το άθροισμα των ασκουμένων επάνω του δυνάμεων είναι μηδέν. Οι δυνάμεις αυτές είναι τρεις, οι ασκούμενες στα άκρα του λόγω των πιέσεων:



$F_1=\pi r^2 p_1$ και $F_2=\pi r^2 p^2$ και η δύναμη του ιξώδους: $T = \eta S \frac{d\upsilon}{dy} = -\eta 2\pi r L \frac{d\upsilon}{dr}$

Το αρνητικό σημείο στη σχέση αυτή οφείλεται στο ότι r=R-y και επομένως dr=-dy. Το άθροισμα των δυνάμεων είναι: $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{T}=0$ ή $F_1=F_2+T$ από την οποία με αντικατάσταση θα προκύψει:

$$\pi r^2 p_1 = \pi r^2 p_2 - 2\eta\pi r L \frac{d\upsilon}{dr} \qquad \text{ή} \qquad d\upsilon = -\frac{p_1 - p_2}{2L\eta} r dr$$

Στα τοιχώματα του σωλήνα, όπου r=R, η ταχύτητα είναι μηδενική, ενώ σε απόσταση r από το κέντρο του σωλήνα είναι υ. Με ολοκλήρωση λοιπόν της προηγουμένης σχέσεως προκύπτει:

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = -\int_R^r \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r dr \Rightarrow \quad \upsilon = -\frac{p_1 - p_2}{2\,L} r^2 \Big|_R^r = \quad \frac{1}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}(R^2 - r^2)$$

Επομένως, η ταχύτητα ροής υ σε απόσταση r από τον άξονα σωλήνα, ακτίνας R είναι:

$$\upsilon = \frac{1}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}(R^2 - r^2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, η ταχύτητα σε κάθε σημείο είναι ανάλογη προς τη μεταβολή της πίεσης ανά μονάδα μήκους $(p_2\text{-}p_1)/L$ ή dp/dx, που ονομάζεται και *βαθμίδα πίεσης*.

<u>Η φορά της ροής είναι πάντα αντίθετη προς την dp/dx</u>.

Δηλ., $\upsilon \sim -(p_2\text{-}p_1)/L$ ή $\upsilon \sim (p_1\text{-}p_2)/L$

Η παροχή του σωλήνα Q, βρίσκεται αν θεωρηθεί στοιχειώδης όγκος με τη μορφή κυλίνδρου πάχους dr. Η παροχή αυτή είναι: $dQ = dV/dt = \upsilon \cdot dS = \upsilon \cdot 2\pi r dr$, όπου dS η επιφάνεια της διατομής. Επομένως:

$$dQ = \frac{1}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}(R^2 - r^2)2\pi \cdot r dr$$

Και με ολοκλήρωση της σχέσεως αυτής από r = 0 ως r = R, βρίσκεται η *ολική* παροχή Q οριζόντιου σωλήνα μήκους L και ακτίνας R, ο οποίος διαρρέεται από ρευστό ιξώδους η, και στα άκρα του οποίου υπάρχουν πιέσεις p_1 και p_2, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4$$

Νόμος του Poiseuille