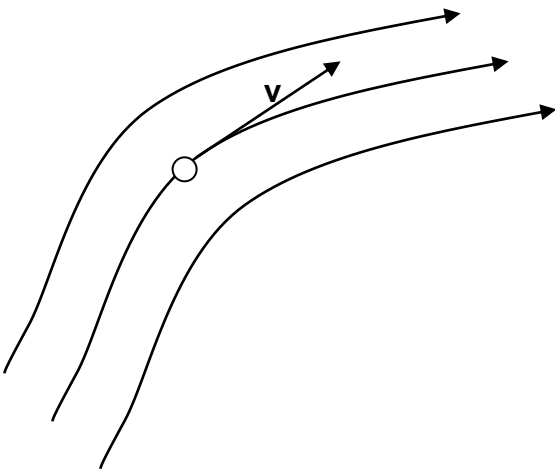


# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

## Εισαγωγικές έννοιες

- Ροή ονομάζεται η κίνηση ρευστού σε περιοχή του χώρου
- Η περιοχή αυτή ονομάζεται **πεδίο ροής**
- Η τροχιά την οποία διαγράφει **στοιχειώδης όγκος του ρευστού** («σωματίδιο» ρευστού) κατά την κίνησή του στο πεδίο ροής, ονομάζεται **γραμμή ροής**.




- Καθώς αυτά κινούνται η ταχύτητα τους μπορεί να μεταβάλλεται σε μέτρο και κατεύθυνση.
- Η ταχύτητα τους σε κάθε σημείο θα είναι εφαπτόμενη της γραμμής ροής.
- Οι γραμμές ροής δεν τέμνονται ποτέ γιατί τότε το «σωματίδιο» που θα έφτανε σε αυτή την τομή θα είχε ταυτόχρονα δύο ταχύτητες – ΑΔΥΝΑΤΟ.

# ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ – ΙΔΑΝΙΚΑ ΡΕΥΣΤΑ

Η κίνηση των **πραγματικών ρευστών** είναι πολύπλοκη και δεν έχει κατανοηθεί πλήρως μέχρι σήμερα ( εμφανίζουν αποδιάταξη στο χώρο και τον χρόνο – ΧΑΟΣ)

ΑΡΧΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ: **Ιδανικά ρευστά**

## **Υποθέσεις**

**ΜΟΝΙΜΗ – ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ:** Αν ο στοιχειώδης όγκος του ρευστού, που περνά από το τυχαίο σημείο του πεδίου ροής, διαγράφει πάντοτε την ίδια γραμμή ροής ενώ η ταχύτητά του στο δεδομένο σημείο είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η ροή ονομάζεται **μόνιμη (steady)**. Στην ειδική περίπτωση που η μόνιμη ροή γίνεται κατά παράλληλα στρώματα, καθένα από τα οποία έχει καθορισμένη ταχύτητα, η ροή ονομάζεται **στρωτή (laminar)**. 

Στη γενική περίπτωση η ροή εξαρτάται από τον χρόνο, και είναι δυνατόν ο στοιχειώδης όγκος  $dV$  του υγρού, που διέρχεται από δεδομένο σημείο του πεδίου ροής, είτε να διαγράφει διαφορετικές γραμμές ροής σε διαφορετικές χρονικές στιγμές είτε να σχηματίζει στροβίλους. Τότε η ροή ονομάζεται **τυρβώδης ή στροβιλώδης** και το αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση εσωτερικής τριβής, οπότε ένα μέρος από τη μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα.

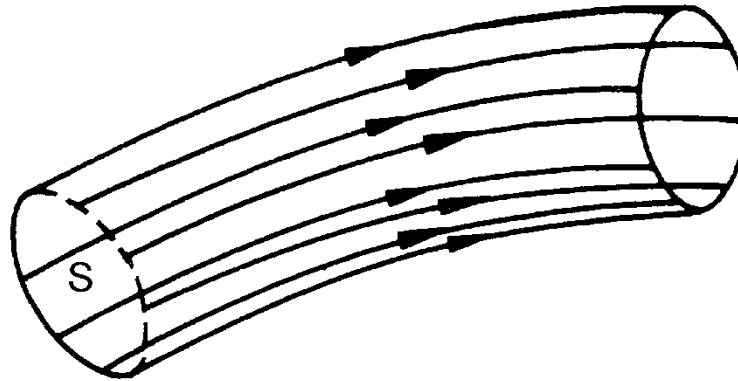
**1.ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΑ:** Η πυκνότητα των ιδανικών ρευστών είναι παντού σταθερή. Η παραδοχή της μη συμπιεστότητας είναι συνήθως μια καλή προσέγγιση για υγρά. Μπορούμε και ένα αέριο να το θεωρήσουμε ως ασυμπίεστο όταν η διαφορά πίεσης μεταξύ των διαφόρων περιοχών του δεν είναι πολύ μεγάλη.

## Ιδανικά ρευστά - Υποθέσεις (συνέχεια)

3. **Η ΡΟΗ ΔΕΝ ΣΥΝΑΝΤΑ ΚΑΜΙΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ** (Nonviscous flow). Η εσωτερική αντίσταση που εμφανίζει ένα ρευστό όταν ρέει μετράται με το **ιξώδες**. Π.χ ροή μελιού – ροή νερού. Το ιξώδες είναι το ανάλογο της τριβής μεταξύ των στερεών διότι και στους δύο μηχανισμούς η ΚΕ της κίνησης μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.
- Η εσωτερική τριβή σε ένα ρευστό προκαλεί διατμητικές τάσεις, όταν ένα στρώμα ρευστού κινείται ως προς κάποιο γειτονικό του στρώμα, όπως για παράδειγμα σε ένα ρευστό που ρέει μέσα σε ένα σωλήνα ή γύρω από ένα αντικείμενο. Σε μερικές περιπτώσεις, μπορούμε να αγνοήσουμε αυτές τις διατμητικές δυνάμεις, που είναι αμελητέες συγκρινόμενες με αυτές που προέρχονται από τη βαρύτητα και τις διαφορές πίεσης.
  - Απουσία τριβής ένα στερεό σώμα θα ολισθαινε με σταθερή ταχύτητα σε μια οριζόντια επιφάνεια. Ομοίως, ένα σώμα δεν θα συναντούσε καμία αντίσταση κατά την κίνηση του μέσα σε ιδανικό ρευστό. Ο Λόρδος Rayleigh παρατήρησε ότι η προπέλα ενός πλοίου δεν θα δούλευε σε ιδανικό ρευστό, από την άλλη όμως, το πλοίο (αφού τεθεί σε κίνηση σε τέτοιο ρευστό) δεν θα χρειαζόταν προπέλα.
4. **Μη περιστροφική κίνηση** (Irrotational flow). Εάν μελετήσουμε τη κίνηση ενός μικρού κόκκου σκόνης που κινείται μαζί με το ρευστό τότε ο κόκκος μπορεί να κινείται σε κυκλική διαδρομή όχι όμως γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. «Χαλαρό ανάλογο»: η κίνηση της ρόδας ενός ποταμόπλοιου είναι περιστροφική όχι όμως και των επιβατών του.

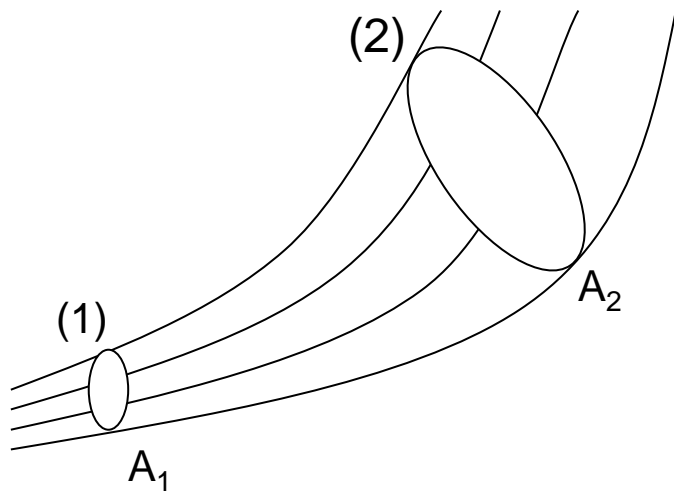
Σε ροή που ακολουθεί τα προηγούμενα μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση απομονώνοντας την σε νοητό **σωλήνα – φλέβα** φτιαγμένο από γραμμές ροής (στρωτή ροή, όχι στρόβιλοι - **ρευματικές γραμμές**).

*\*Στο πλαίσιο αυτού του μαθήματος θα θεωρήσουμε μόνο μόνιμες καταστάσεις, στις οποίες οι γραμμές ροής συμπίπτουν με τις ρευματικές γραμμές*



Ένα «σωματίδιο ρευστού» που βρίσκεται σε μια τέτοια φλέβα **δεν μπορεί να δραπέτεύσει από τα νοητά τοιχώματά της**. Εάν αυτό συνέβαινε θα είχαμε τομή ρευματικών γραμμών.

# ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



**(1):** το ρευστό κινείται με ταχύτητα  $u_1$ . Στο χρονικό διάστημα  $dt$ , ένα «σωματίδιο» ρευστού θα διανύσει απόσταση  $u_1 dt$  και όγκος  $dV = A_1 u_1 dt$  θα περάσει από την  $A_1$ . Αφού το ρευστό είναι **ασυμπίεστο** ο ίδιος όγκος θα περάσει από το **C**.

**(2):** Εάν η ταχύτητα εκεί είναι  $u_2$  τότε:  
 $dV = A_1 u_1 dt = A_2 u_2 dt$

ή  $A_1 u_1 dt = A_2 u_2 dt$

ή  $Q = dV/dt = Au = \text{σταθ.}$   
**(ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)**

Το ρευστό δεν διαπερνά το πλευρικό τοίχωμα σε κανένα σημείο του.

**Παροχή φλέβας Q** ονομάζεται ο όγκος  $dV$  ρευστού που διέρχεται από μία διατομή της σε χρόνο  $dt$ , διά του χρόνου αυτού:

$Q = dV/dt$  Μονάδα μετρήσεως της παροχής είναι το  $1 \text{ m}^3/\text{sec}$  ή  $1 \text{ cm}^3/\text{sec}$ .

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

- Η ροή είναι ταχύτερη στα στενότερα τμήματα ενός σωλήνα όπου οι ρευματικές γραμμές είναι πυκνότερες
- Είναι μια έκφραση της **αρχής διατήρησης της μάζας** (αφού  $\rho = \text{σταθ.}$  mass flow rate – SI units kg/s - constant)

## **Εξίσωση συνέχειας ως απόρροια της αρχής διατήρησης της μάζας:**

Αν η πυκνότητα του ρευστού είναι  $\rho$  (= σταθερή, ασυμπίεστο ρευστό), η μάζα  $dm_1$  που εισρέει στο σωλήνα στη διατομή (1) είναι:  $dm_1 = \rho A_1 u_1 dt$ .

Παρόμοια, η μάζα  $dm_2$ , που εκρέει μέσα από την  $A_2$  (διατομή (2)) στον ίδιο χρόνο είναι  $dm_2 = \rho A_2 u_2 dt$ .

Στη μόνιμη ροή, η ολική μάζα μέσα στο θεωρούμενο τμήμα του σωλήνα ροής είναι σταθερή, οπότε:

$$\rho A_1 u_1 dt = \rho A_2 u_2 dt \quad \text{ή} \quad A u = \text{σταθ.}$$

Ο ρυθμός ροής μάζας ανά μονάδα χρόνου διαμέσου μιας εγκάρσιας διατομής (**Παροχή μάζας**), ισούται με την πυκνότητα επί την παροχή όγκου (παροχή φλέβας)

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε για την **περίπτωση που το ρευστό δεν είναι ασυμπίεστο**.

Αν  $\rho_1$  και  $\rho_2$  είναι οι πυκνότητες στις διατομές B και C, τότε:

$$\rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2$$

**Εξίσωση Συνέχειας:** Η παροχή είναι σταθερή κατά μήκος οποιουδήποτε σωλήνα ροής

**Συνακόλουθο:** Όταν η εγκάρσια διατομή ενός σωλήνα ροής ελαττώνεται, η ταχύτητα αυξάνει.

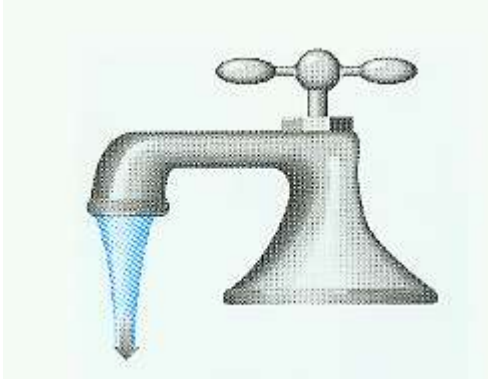
**Παραδείγματα:**

1) Έστω ποταμός σταθερού πλάτους. Το ρηχό τμήμα του ποταμού έχει μικρότερη εγκάρσια διατομή και γρηγορότερο ρεύμα από το βαθύ τμήμα αφού η παροχή είναι ίδια και στα δύο. Επομένως, το νερό "τρέχει" γρηγορότερα εκεί που το ποτάμι είναι ρηχό και βραδύτερα (πιο σιγανά) εκεί όπου είναι βαθύ.

**Τα σιγανά (που είναι τα βαθύτερα) ποτάμια να φοβάσαι...**

2) Βρύση

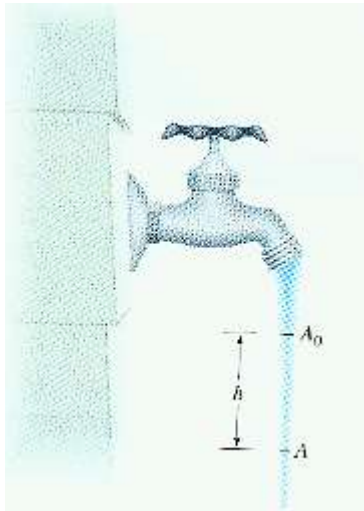
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ (Άσκηση 22 από Κουίζ)



Καθώς το νερό «πέφτει», η ταχύτητα του αυξάνει και επομένως η διατομή θα πρέπει να μειώνεται σύμφωνα με την εξ. συνέχειας.

### ΑΣΚΗΣΗ:

Το εμβαδόν της διατομής στη στάθμη  $A_0$  είναι  $1,2 \text{ cm}^2$  και στην  $A$ :  $0,35 \text{ cm}^2$ . Η απόσταση  $h$  μεταξύ των  $A_0$  και  $A$  είναι  $45 \text{ mm}$ . Πόση είναι η παροχή του νερού από τη βρύση;



Από εξ. συνέχειας:  $A_0 u_0 = A u$

Το νερό εκτελεί ελεύθερη πτώση με σταθερή επιτάχυνση  $g$ , επομένως:  $u^2 = u_0^2 + 2gh$  (Υπολογίζεται εύκολα εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ)

Απαλείφουμε το  $u$  στις παραπάνω και έχουμε:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} = \sqrt{\frac{2(9,8 \text{ m/s}^2)(0,045 \text{ m})(0,35 \text{ cm}^2)^2}{(1,2 \text{ cm}^2)^2 - (0,35 \text{ cm}^2)^2}} = 0,286 \text{ m/s} = 28,6 \text{ cm/s}$$

Η παροχή είναι τότε:  $Q = A_0 u_0 = (1,2 \text{ cm}^2) (28,6 \text{ cm/s}) = 34 \text{ cm}^3/\text{s}$

Με αυτή την παροχή θα χρειαστούν περίπου  $3 \text{ s}$  για να γεμίσει δοχείο  $100 \text{ ml}$



## Άσκηση 23

Ένα λάστιχο ποτίσματος εσωτερικής διαμέτρου 2 cm συνδέεται με ένα ραντιστήριο που αποτελείται απλώς από ένα κλειστό περίβλημα με 24 τρύπες, η καθεμιά διαμέτρου 0,12 cm. Αν το νερό στο λάστιχο έχει ταχύτητα 1 m/sec, με ποια ταχύτητα φεύγει το νερό από τις τρύπες του ραντιστηριού;

### ΛΥΣΗ

Διάμετρος του ποτιστικού σωλήνα:  $D = 2\text{cm} = 2 \times 10^{-2}\text{ m}$

Διάμετρος οπής:  $d = 0,12\text{cm} = 1,2 \times 10^{-3}\text{ m}$

Ταχύτητα νερού στο σωλήνα:  $v_{\text{σωλ.}} = 1\text{m/s}$

Εξ. συνέχειας:  $Q = dV/dt = Av = \text{σταθ.}$

Επομένως,  $A_{\text{σωλ.}}v_{\text{σωλ.}} = A_{\text{οπών}}v_{\text{οπ.}}$

$$\pi (D/2)^2 1\text{m/s} = 24\pi (d/2)^2 v_{\text{οπ.}} \Rightarrow v_{\text{οπ.}} = \frac{1}{24} \frac{D^2}{d^2} \text{m/s} \Rightarrow v_{\text{οπ.}} = 11,574\text{m/s}$$

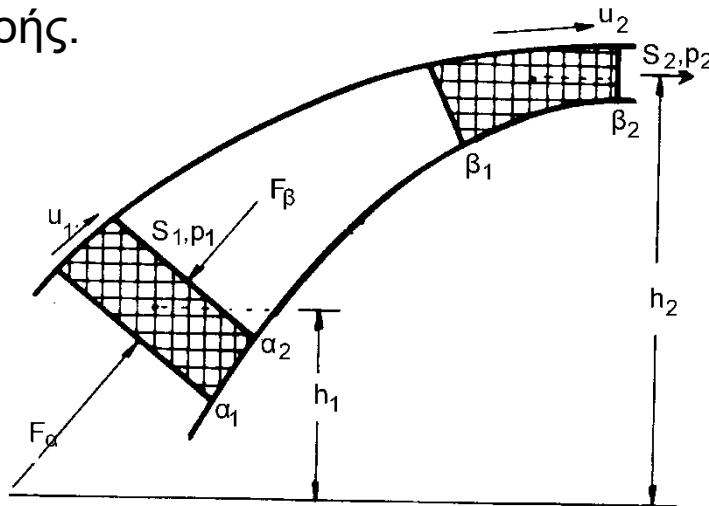
# ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

(για στρωτή, ασυμπίεστη, χωρίς εσωτερικές τριβές ροή)

Η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στον φορμαλισμό της ρευστομηχανικής

Ο νόμος Bernoulli απαιτεί την ανυπαρξία απώλειών μηχανικής ενέργειας κατά τη ροή, δηλαδή την ανυπαρξία εσωτερικής τριβής.

Θεωρήστε τη χωρίς εσωτερικές τριβές, στρωτή, ασυμπίεστη ροή ενός ρευστού μέσα από ένα σωλήνα ή μια φλέβα ροής.

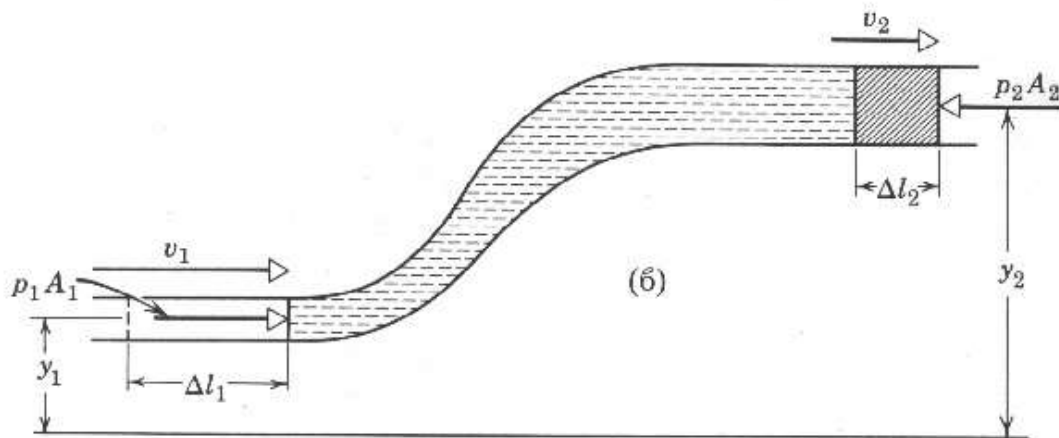
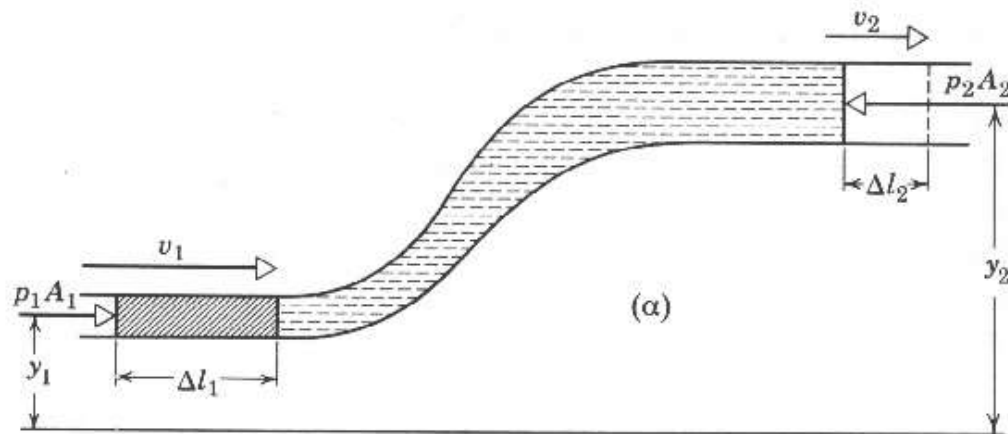


**Θεώρημα Έργου - Ενέργειας:  $W = \Delta K$**

(Το έργο που παράγεται από τη συνισταμένη δύναμη η οποία δρα πάνω σε ένα σύστημα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος)

$$\Delta K = \frac{1}{2} dm u_2^2 - \frac{1}{2} dm u_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (u_2^2 - u_1^2)$$

$\rho = \text{σταθ.}$  – Ασυμπίεστο ρευστό



- Οι δυνάμεις που παράγουν έργο πάνω στο σύστημα, υποθέτοντας ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τις δυνάμεις τριβής, είναι οι δυνάμεις πίεσης  $p_1 A_1$  και  $p_2 A_2$  που δρουν στο αριστερό και δεξί άκρο του συστήματος αντίστοιχα και η δύναμη βαρύτητας.
- Καθώς το ρευστό ρέει μέσα στο σωλήνα το συνολικό αποτέλεσμα είναι η ανύψωση ενός ποσού ρευστού που δείχνεται με τη γραμμοσκιασμένη περιοχή του (α) στη θέση που δείχνει το (β). Το ποσό του ρευστού που παριστάνεται με τις οριζόντιες γραμμές δεν έχει μεταβληθεί κατά τη ροή.

## Το έργο $W$ που παράγει πάνω στο σύστημα η συνισταμένη δύναμη είναι:

1. Το έργο που παράγεται πάνω στο σύστημα από τη βαρύτητα συνδέεται με την ανύψωση του γραμμοσκιασμένου ρευστού μάζας  $dm$  από το ύψος  $y_1$  του επιπέδου εισαγωγής του ρευστού σε ύψος  $y_2$  στο επίπεδο εξόδου.

$$W_g = - dm g (y_2 - y_1) = - \rho g dV (y_2 - y_1)$$

Το έργο είναι αρνητικό αφού η κάθετη μετατόπιση («προς τα πάνω») έχει αντίθετη κατεύθυνση από το βάρος («προς τα κάτω»). Δηλ. παράγεται έργο από το σύστημα ενάντια στη δύναμη βαρύτητας.

2. Έργο που παράγει πάνω στο σύστημα η δύναμη πίεσης  $p_1 A_1$  (στο άκρο εισόδου) για να σπρώξει το υγρό στο σωλήνα και έργο που παράγει πάνω στο σύστημα η δύναμη πίεσεως  $p_2 A_2$  (στο άκρο εξόδου)

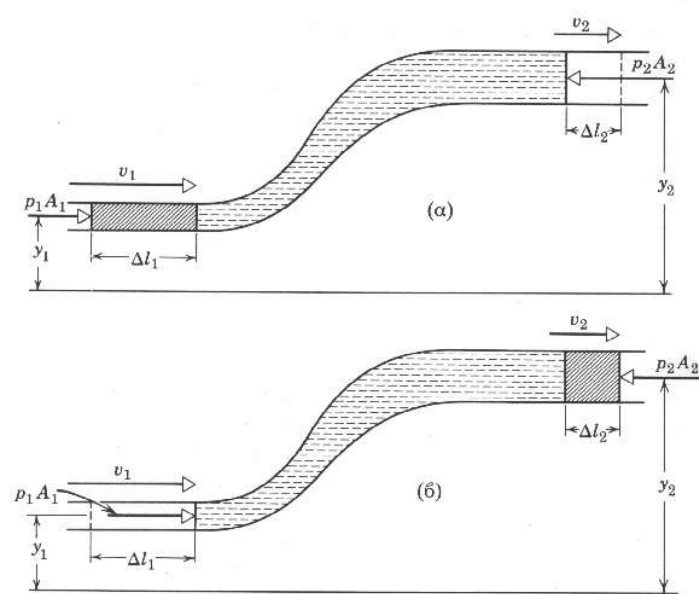
Γενικά: Το έργο που παράγεται από μια δύναμη  $F$  που κινεί ρευστό κατά απόσταση  $dx$  μέσα σε σωλήνα διατομής  $S$ , είναι:

$$F dx = (p A) dx = p (A dx) = p dV$$

Υποθέτουμε για το σχήμα:  $p_1 > p_2$  (ροή από αριστερά προς τα δεξιά)

- Στο άκρο εισόδου: Έργο **θετικό**, δύναμη-ροή ίδια κατεύθυνση  $+p_1 dV$

- Στο άκρο εξόδου: Έργο **αρνητικό**, δύναμη-ροή αντίθετη κατεύθυνση  $-p_2 dV$  (αρνητικό σημαίνει ότι **θετικό έργο παράγεται από το σύστημα** για να σπρώξει το υγρό προς τα εμπρός.



$dV = \text{σταθ.} - \text{ασυμπίεστο ρευστό}$

$$W_p = - p_2 dV + p_1 dV = - (p_2 - p_1) dV$$

$$W = W_g + W_p = \Delta K$$

$$- \rho g dV (y_2 - y_1) - (p_2 - p_1) dV = \frac{1}{2} \rho dV (u_2^2 - u_1^2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g y_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g y = \text{σταθ.}$$

- Η πίεση  $p$  ονομάζεται **στατική**, είναι εκείνη που θα μετρηθεί με μανόμετρο τοποθετημένο στη φλέβα, και συνδέεται με τις δυνάμεις που προκαλούν τη ροή του ρευστού. Μπορεί να λεχθεί ότι η στατική πίεση είναι, στην περίπτωση αυτή, το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις αυτές σε κάθε μονάδα όγκου του ρευστού.
- Η πίεση  $\frac{1}{2}\rho u^2$  ονομάζεται **δυναμική** και συνδέεται με την κινητική ενέργεια του ρευστού, είναι δηλαδή η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.
- Ο όρος  $\rho g h$  είναι η **υδροστατική** πίεση που συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια, δηλαδή απεικονίζει την επίδραση του πεδίου βαρύτητας στην κίνηση του ρευστού.

Επομένως ο **νόμος του Bernoulli** εκφράζει ότι **κατά τη ροή ιδανικού ρευστού το άθροισμα της στατικής πίεσης  $p$ , της υδροστατικής  $\rho g h$  και της δυναμικής  $\frac{1}{2}\rho u^2$ , κατά μήκος μιας φλέβας παραμένει σταθερό.**

# ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{σταθ.}$$

- Αν το ρευστό είναι ακίνητο  $v = 0$ , οπότε η δυναμική πίεση είναι επίσης 0, ο νόμος του Bernoulli εκφυλίζεται στη θεμελιώδη εξίσωση της στατικής των ρευστών.
- Αν αντίθετα η κίνηση του υγρού γίνεται σε οριζόντιο σωλήνα, οπότε  $h=0$  και η υδροστατική πίεση μηδενίζεται, ο νόμος του Bernoulli γίνεται:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{σταθ.}$$

**Όταν λοιπόν η διατομή του σωλήνα δεν είναι σταθερή, στα σημεία στα οποία η ταχύτητα είναι μικρότερη, είναι μεγαλύτερη η πίεση και αντίστροφα.**

**Εάν η ταχύτητα ενός σωματιδίου ρευστού αυξάνεται καθώς ταξιδεύει σε μια ρευματική γραμμή, η πίεση του ρευστού ελαττώνεται και αντίστροφα.**

**ΑΛΛΙΩΣ: Εκεί που οι ρευματικές γραμμές είναι σχετικά πυκνές (επομένως η ταχύτητα είναι σχετικά μεγάλη) η πίεση είναι σχετικά μικρή και αντίστροφα.**

**Εξ. Συνέχειας:**

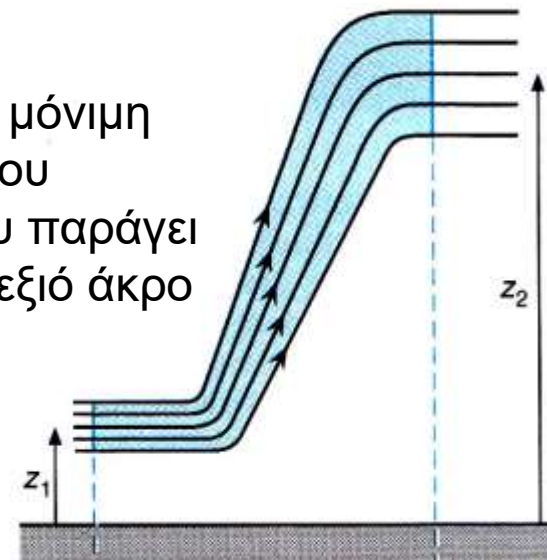
$\downarrow A$        $\uparrow v$

τότε **εξ. Bernoulli:**

$\downarrow p$

## Ερώτηση

Στοιχειώδης όγκος  $dV$  ασυμπίεστου ρευστού που ακολουθεί μόνιμη ροή μεταφέρεται μέσα από τη φλέβα ρευματικών γραμμών του σχήματος από ύψος  $z_1$  σε ύψος  $z_2$ . (i) Ποιο είναι το έργο που παράγει η πίεση πάνω στη μάζα του ρευστού στο αριστερό και στο δεξιό άκρο αυτού του τμήματος κατά τη διάρκεια της κίνησης;



## Απάντηση

i) Αριστερό άκρο:  $dW_1 = p_1 dV$

ii) Δεξί άκρο:  $dW_2 = - p_2 dV$

## Άσκηση

(α) Πόσο έργο παράγεται από την πίεση όταν ωθεί  $10 \text{ m}^3$  νερού μέσα σε ένα σωλήνα αν η διαφορά πιέσεως στα δύο άκρα του σωλήνα είναι  $150 \text{ Pa}$ ;

### ΛΥΣΗ

$$W = F dx = p A dx = p dV \quad (1)$$

$$W_{\text{εισ.}} > 0 \quad \text{και} \quad W_{\text{εξερχ.}} < 0 \quad (2)$$

$$W = W_{\text{εισ.}} + W_{\text{εξερχ.}} \stackrel{(1) \& (2)}{=} p_1 dV - p_2 dV = \Delta p dV = 150 \text{ N/m}^2 \cdot 10 \text{ m}^3 = 1500 \text{ N m} = 1500 \text{ Joule}$$

## Άσκηση (συνέχεια)

(β) Αν τέτοια ποσότητα νερού πέφτει κάθε λεπτό (δηλ. με ρυθμό  $10 \text{ m}^3/\text{min}$ ) από ύψος  $10 \text{ m}$  και κινεί έναν υδροστρόβιλο, ποιά η μέγιστη ισχύς που μπορεί να αναπτύξει ο στρόβιλος αυτός;

### ΛΥΣΗ

$$W = m g \quad (1)$$

$$E_w = W h \quad (2)$$

Από (1) και (2):

$$E_w = mgh = \rho Vgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{dE_w}{dt} = \rho gh \frac{dV}{dt} \Rightarrow$$

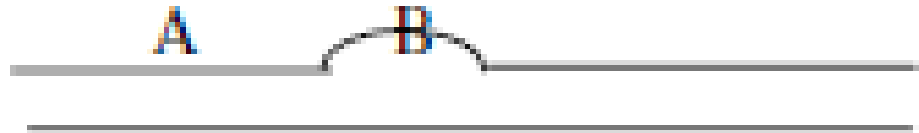
$$\Rightarrow P = 10^3 \cdot 9,8 \cdot 10 \cdot \frac{10 \text{ kg}}{60 \text{ m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{m} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 16,3 \cdot 10^3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 16,3 \cdot 10^3 \text{ Joule/s} = 16,3 \text{ kWatt}$$



## ΕΡΩΤΗΣΗ Πολ. Επιλ.

Ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι λάθος για το ανεύρυσμα (περιοχή με εξασθετισμένο αρτηριακό τοίχωμα) που παριστάνεται στο ακόλουθο σχήμα;

- (α) Ο ρυθμός ροής (παροχή) στο A είναι ίδιος με αυτόν στο B
- (β) Η ταχύτητα στο B είναι μικρότερη από αυτήν στο A
- (γ) Η πίεση στο B είναι μικρότερη από αυτήν στο A
- (δ) Η πυκνότητα στο B είναι η ίδια με αυτήν στο A



Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι αυτό μιας αρτηρίας με μερική έμφραξη που μπορεί να οφείλεται παραδείγματος χάρη στην εμφάνιση αθηρωματικών πλακών στο τοίχωμα των οποίων ο πυρήνας αποτελείται κυρίως από χοληστερόλη. Η ασθένεια αυτή είναι γνωστή ως **αθηροσκλήρωση**.

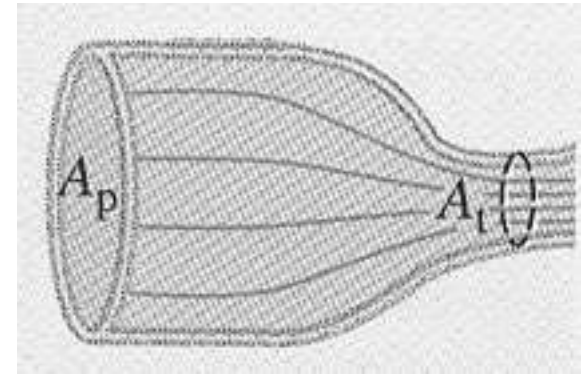
Σε αυτή την περίπτωση η πίεση τοπικά θα μειωθεί σημαντικά και εάν η εναπόθεση αθηρωματικής πλάκας είναι μεγάλη, μπορεί να πέσει σε τιμές τέτοιες που η διαφορά τους με την τιμή της εξωτερικής πίεσης να είναι αρκετή ώστε να προκαλέσει κατάρρευση της αρτηρίας, διακόπτοντας έτσι τη ροή του αίματος.

Όταν αυτό εμφανίζεται στη στεφανιαία αρτηρία, η οποία τροφοδοτεί με αίμα τους μυς της καρδιάς, προκαλείται στηθάγχη και ενδεχομένως έμφραγμα. Όταν εμφανίζεται στις αρτηρίες που οδηγούν στον εγκέφαλο ή στις εγκεφαλικές αρτηρίες, προκαλείται παροδικό ισχαιμικό επεισόδιο και ενδεχομένως εγκεφαλικό επεισόδιο.



## ΑΣΚΗΣΗ 25

Υπολογίστε τη μεταβολή της πίεσης υγρού στην περίπτωση που αυτό ρέει σε οριζόντια φλέβα η ακτίνα της οποίας υποτριπλασιάζεται. Υποθέστε ότι η ταχύτητα της ροής του υγρού στην περιοχή όπου δεν υπάρχει στένωση είναι 50 cm/s. Η πυκνότητα του υγρού είναι 1050 kg/m<sup>3</sup>.



Οριζόντια φλέβα  $\rightarrow h_1 = h_2$                        $r_2 = 3r_1$                       και                       $u_2 = 50 \text{ cm/s}$

$$\text{Άρα εξ. Bernoulli: } p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \Leftrightarrow \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Εξ. Συνέχειας: } \quad A_1 u_1 &= A_2 u_2 \\ \pi r_1^2 u_1 &= \pi r_2^2 u_2 \Leftrightarrow u_1 = (r_2/r_1)^2 u_2 \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2) και αφού  $r_2 = 3r_1$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho ((r_2/r_1)^4 u_2^2 - u_2^2) = \frac{1}{2} 80 \rho u_2^2 = 10500 \text{ Pa}$$

# ΑΣΚΗΣΗ

Υποθέστε ότι ο άνεμος φυσά με ταχύτητα  $20 \text{ m/s}$  πάνω από τη σκεπή του σπιτιού σας. ( $\rho_{\text{ατμ.αέρα}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$ )

(α) Βρείτε πόσο χαμηλότερα από την τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης απουσία κάθε ανέμου έχει μειωθεί η πίεση πάνω από τη σκεπή.

(β) Εάν το εμβαδόν της σκεπής είναι  $300 \text{ m}^2$ , βρείτε την ολική δύναμη που ασκείται πάνω της. (Η πίεση στο εσωτερικό του σπιτιού είναι ίση με την ατμοσφαιρική και θεωρείστε ότι η εσωτερική και η εξωτερική πλευρά της σκεπής βρίσκονται στο ίδιο ύψος  $h$ )



## ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Υπό ποιες προϋποθέσεις ένα ρευστό ικανοποιεί: (i) την εξίσωση συνέχειας (ii) την εξίσωση Bernoulli;

β) Σε κάποιο σημείο ενός σωλήνα ύδρευσης, η ταχύτητα του νερού είναι 4 m/s και η διαφορική πίεση  $5 \times 10^4$  Pa. Βρείτε τη διαφορική πίεση σε ένα άλλο σημείο του σωλήνα, που είναι 12m χαμηλότερα από το πρώτο και όπου η διατομή έχει εμβαδόν υπόδιπλάσιο από αυτό στο ψηλότερο σημείο ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- α) (i) Ασυμπίεστο ρευστό ( $\rho = \text{σταθ.}$ )  
(ii) Ασυμπίεστο ΚΑΙ χωρίς ιξώδες ρευστό

- β) Σημείο (1):  $u_1 = 4 \text{ m/s}$        $p_1 - p_{\text{atm}} = 5 \times 10^4 \text{ Pa.}$   
Σημείο (2):  $A_2 = (1/2)A_1$        $z_1 - z_2 = 12 \text{ m}$        $p_2 - p_{\text{atm}} = ?$

### Εξ. Συνέχειας

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{A_1}{A_2} u_1 \Rightarrow u_2 = 2u_1$$

### Εξ. Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + mgz_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + mgz_2$$

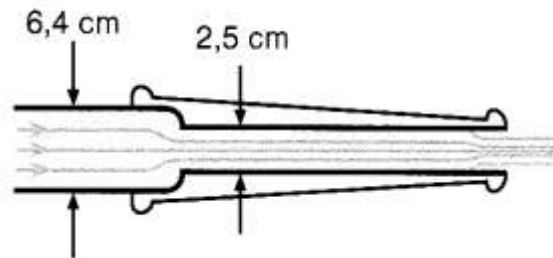
$$p_1 - p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g z_1 = p_2 - p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g z_2$$

$$p_2 - p_{\text{atm}} = p_1 - p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + \rho g (z_1 - z_2) =$$

$$= 5 \cdot 10^4 \text{ Pa} + 10^3 \left( -\frac{3}{2} 16 + 9,8 \cdot 12 \right) \text{ Pa} =$$

$$= 5 \cdot 10^4 \text{ Pa} + 9,36 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 14,36 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 27:** Η διαφορική πίεση ( $p - p_{\text{atm}}$ ) σε ένα πυροσβεστικό σωλήνα διαμέτρου 6,4 cm είναι  $3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  και η ταχύτητα ροής είναι 4,0 m/s. Ο σωλήνας καταλήγει σε ένα μεταλλικό ακροφύσιο διαμέτρου 2,5 cm



α) Πόση είναι η διαφορική πίεση και η ταχύτητα του νερού στο ακροφύσιο;

Από εξ. Συνέχειας:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 4 \text{ m/s} \frac{\pi \cdot (6,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} / 2)^2}{\pi \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} / 2)^2} = 26,2 \text{ m/s}$$

Η πίεση του νερού στο ακροφύσιο μπορεί τότε να υπολογιστεί από την εξίσωση Bernoulli με  $z_1 = z_2 = 0$ :

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Για να μετατρέψουμε αυτή τη σχέση σε εξίσωση διαφορικών πιέσεων αφαιρούμε  $p_{\text{atm}}$  και από τα δύο σκέλη:

$$p_2 - p_{\text{atm}} = p_1 - p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Με  $p_1 - p_{\text{atm}} = 3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_2 - p_{\text{atm}} &= 3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + \frac{1}{2} \times 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times (4,0 \text{ m/s})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \times 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times (26,2 \text{ m/s})^2 \\ &= 1,4 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

β) Πόση είναι η ταχύτητα του νερού ακριβώς έξω από το ακροφύσιο;

γ) Η διάμετρος της φλέβας του νερού αυξάνεται, ελαττώνεται ή παραμένει ίδια καθώς αυτό εγκαταλείπει το ακροφύσιο;

ΛΥΣΗ: Η ταχύτητα του νερού ακριβώς έξω από το ακροφύσιο μπορεί να υπολογιστεί κατευθείαν από την εξίσωση του Bernoulli. Έχουμε ξανά ότι  $z_1 = z_2 = 0$ , η πίεση  $p_3$  είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση  $p_{\text{atm}}$ :

$$\begin{aligned}v_3^2 &= v_1^2 + \frac{2p_1}{\rho} - \frac{2p_{\text{atm}}}{\rho} = v_1^2 + \frac{2}{\rho} (p_1 - p_{\text{atm}}) \\&= (4,0 \text{ m/s})^2 + \frac{2 \times 3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1,0 \times 10^3 \text{ N/m}^2} \\&= 716 \text{ (m/s)}^2\end{aligned}$$

και

$$v_3 = 26,8 \text{ m/s}$$

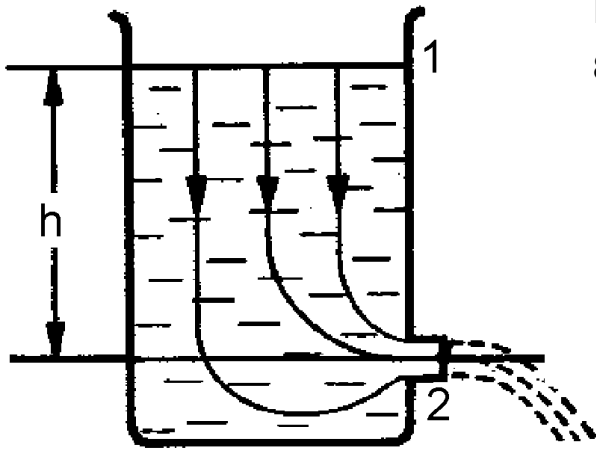
ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ: Η διάμετρος της φλέβας του νερού ακριβώς έξω από το ακροφύσιο είναι λίγο μικρότερη από τη διάμετρο του ακροφυσίου. Τούτο προκύπτει από την εξίσωση συνεχείας,

$$A_3 = A_2 \frac{v_2}{v_3} = A_2 \frac{26,2 \text{ m/s}}{26,8 \text{ m/s}} = A_2 \times 0,98$$

Αφού η εγκάρσια τομή  $A_2$  έχει διάμετρο 2,5 cm, η εγκάρσια τομή  $A_3$  θα έχει διάμετρο  $2,5 \text{ cm} \times \sqrt{0,98} = 2,5 \text{ cm} \times 0,99$ . Επομένως, η φλέβα του νερού συστέλλεται καθώς αφήνει το ακροφύσιο (Σχ. 12.28). Διαισθητικά, θα περιμέναμε, ίσως, ότι η φλέβα διαστέλλεται καθώς αφήνει το ακροφύσιο, συμβαίνει, όμως, ακριβώς το αντίθετο.

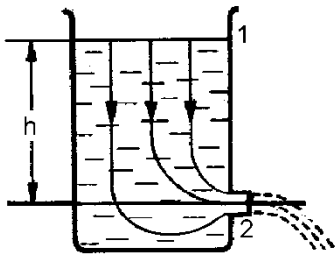
## Θεώρημα Torricelli

Έστω ότι στο κατώτερο σημείο δοχείου που είναι γεμάτο με κάποιο υγρό υπάρχει ένα μικρό άνοιγμα εκροής. Εφαρμογή του νόμου του Bernoulli\* στο σημείο 1 της ελεύθερης επιφάνειας και στο σημείο εκροής 2 δίνει:



$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$





## ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

i) **ΑΝΟΙΚΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ** (στο σημείο (1)  $p_1 = p_{\text{atm}}$ )

- **Πώμα κλειστό στη θέση (2):** τότε  $v_1 = v_2$  ( ακίνητο ρευστό )

$p_1 = p_{\text{atm}}$  και  $p_2 = p_{\text{atm}} + \rho gh$  (θεμ. εξ. Υδροστατικής)

- **Πώμα ανοικτό στη θέση (2):** τότε  $v_1 \neq v_2$  (ροή)

$p_1 = p_{\text{atm}}$  και αφού δεξαμενή ανοικτή και στις δύο περιοχές (1) και (2)

$p_2 = p_1 = p_{\text{atm}}$  και η σχέση (1) απλοποιείται και γίνεται:

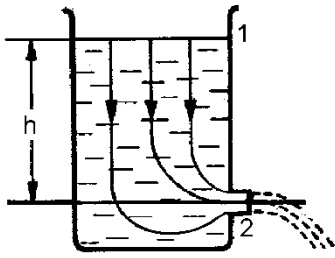
$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{από την οποία προκύπτει:} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα εκροής του υγρού είναι ίδια με εκείνη που θα είχε ένα σώμα που θα εκτελούσε ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος  $h$ , με αρχική ταχύτητα  $v_1$ . Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα του Torricelli**.



Επειδή η  $A_2$  είναι πολύ μικρότερη από την  $A_1$ , η  $v_1^2$  είναι πολύ μικρότερη από την  $v_2^2$  και μπορεί να παραληφθεί (Γιατί; Έλεγξε την εξ. συνέχειας). Έτσι η σχέση για την ταχύτητα εκροής μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο και να γίνει:  $v_2 = \sqrt{2gh}$

Η παροχή στο (2) θα δίνεται τότε ως:  $\frac{dV}{dt} = A_2 \sqrt{2gh}$



## ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

**ii) ΚΛΕΙΣΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ** (στο σημείο (1). Πίεση στο (1) ίση με  $p_1$  )

- **Πώμα κλειστό στη θέση (2):** τότε  $v_1 = v_2$  ( ακίνητο ρευστό )

$$p_2 = p_1 + \rho g h \quad (\text{θεμ. εξ. Υδροστατικής})$$

- **Πώμα ανοικτό στη θέση (2):** τότε  $v_1 \neq v_2$  (ροή)

Η δεξαμενή ανοικτή στο (2) και κλειστή στο (1)  $p_2 \neq p_1$  και από τη σχέση (1)

$$v_2^2 = v_1^2 + 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho} + 2 g h$$

Επειδή η  $A_2$  είναι πολύ μικρότερη από την  $A_1$ , η  $v_1^2$  είναι πολύ μικρότερη από την  $v_2^2$  και μπορεί να παραληφθεί και η σχέση για την ταχύτητα εκροής γίνεται:

$$v_2^2 = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho} + 2 g h$$

**Η ταχύτητα εκροής εξαρτάται από τη διαφορά πίεσης  $p_1 - p_2$  και από το ύψος  $h$  της στάθμης του υγρού στη δεξαμενή.**

## ΑΣΚΗΣΗ

Υποθέστε ότι δύο δοχεία, το καθένα με ένα μεγάλο άνοιγμα στην κορυφή, περιέχουν διαφορετικά υγρά. Μια μικρή τρύπα ανοίγεται στο πλευρό του καθενός δοχείου στην ίδια απόσταση  $h$  κάτω από την επιφάνεια του υγρού, η μία όμως τρύπα έχει διπλάσια διατομή από την άλλη. (α) Ποιος ο λόγος των πυκνοτήτων των ρευστών αν παρατηρείται ότι η ροή μάζας είναι η ίδια για κάθε τρύπα;

## ΛΥΣΗ

$$\frac{dV_1}{dt} = v_1 \cdot A_1 = \sqrt{2gh} \cdot A_1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = v_2 \cdot A_2 = \sqrt{2gh} \cdot A_2$$

και αφού  $A_1 = 2A_2$

$$\frac{dV_2/dt}{dV_1/dt} = \frac{A_2}{2A_2} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε τελικά:  $\rho_1 = 2\rho_2$

(β) Ποια η σχέση μεταξύ των παροχών όγκου στις δύο τρύπες;

(β): Απαντήθηκε στο (α) με την εξ. 2

(γ) Μπορούν οι παροχές όγκου να γίνουν ίσες; Πως;

(γ): i) Αν διπλασιάσουμε τη διατομή  $A_2$  ώστε  $A_1 = A_2$

ii) Αν για τις αρχικές διατομές μεταβάλουμε την απόσταση  $h$  μιας από τις τρύπες από την επιφάνεια του υγρού (π.χ. να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε υγρό ώστε να ανεβεί ή να κατεβεί η στάθμη της επιφάνειας) έτσι ώστε  $h_2 = 4h_1$ . Τότε:

$$\frac{dV_1}{dt} = v_1 \cdot A_1 = \sqrt{2gh_1} \cdot A_1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = v_2 \cdot A_2 = \sqrt{2gh_2} \cdot A_2 = 2\sqrt{2gh_1} \cdot A_2$$

και αφού  $A_1 = 2A_2$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$$

## ΑΣΚΗΣΗ

Στην πλευρική επιφάνεια μεγάλης δεξαμενής νερού υπάρχει κυκλική τρύπα με διάμετρο 2cm, 16 m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή. Η οροφή της δεξαμενής είναι ανοιχτή στον αέρα. Βρείτε α) την ταχύτητα εκροής και β) τον όγκο που εκρέει ανά μονάδα χρόνου. (ή το χρόνο που απαιτείται για να γεμίσει δοχείο όγκου 500 ml)

## ΛΥΣΗ

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{από την οποία προκύπτει:} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

Μεγάλη δεξαμενή σημαίνει ότι η  $A_2$  είναι πολύ μικρότερη από την  $A_1$ , η  $v_1^2$  είναι πολύ μικρότερη από την  $v_2^2$  και μπορεί να παραληφθεί και επομένως η ταχύτητα εκροής είναι:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Η παροχή θα δίνεται τότε ως:

$$\frac{dV}{dt} = A_2 \sqrt{2gh}$$

## Παλια Θέματα Εξετάσεων

1) Ένα αυτοκίνητο φεύγει από την πορεία του, πέφτει στην θάλασσα και βυθίζεται σε βάθος 6 m. Ο οδηγός αρχικά επιχειρεί να ανοίξει την πόρτα αλλά διαπιστώνει ότι αυτό είναι αδύνατο.

α) Η δύναμη που πρέπει να εξασκήσει στην πόρτα είναι ισοδύναμη με το **βάρος** πόσων ελεφάντων; (η πόρτα έχει εμβαδόν  $1 \text{ m}^2$  και ένας ελέφαντας έχει **μάζα** 6 τόνων). Θεωρήστε ότι η πίεση του αέρα στο εσωτερικό αυτοκινήτου είναι ίση με την πίεση στην επιφάνεια.

Απάντηση: περίπου 1ος ελέφαντα

β) Ο οδηγός αποφασίζει να ανοίξει λίγο το παράθυρο ώστε να μπει νερό στο εσωτερικό του αυτοκινήτου (όγκου  $5 \text{ m}^3$ ) και αφού γεμίσει, να επιχειρήσει να ανοίξει την πόρτα. Αν το άνοιγμα στο παράθυρο έχει επιφάνεια  $10 \text{ cm}^2$ , σε πόσο χρόνο θα γεμίσει το αυτοκίνητο με νερό;

Απάντηση: 450 sec

2)

α) Για ποιο λόγο η πορτοκαλάδα ανεβαίνει στο στόμα μας όταν την ρουφάμε με καλαμάκι;

β) Αν πίνετε μέσα σε 20 sec, ένα ποτήρι νερού, όγκου 200 ml, μέσα από καλαμάκι μήκους 30 cm και διατομής  $20 \text{ mm}^2$  με σταθερή παροχή, υπολογίστε την ταχύτητα κίνησης του νερού. Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη μείωση  $\Delta p$  της πίεσης στο εσωτερικό του στόματος σας; Θεωρήστε ότι το καλαμάκι είναι κατακόρυφο, μόλις που αγγίζει την επιφάνεια νερού στο ποτήρι και ότι βρισκόμαστε στην επιφάνεια της θάλασσας.

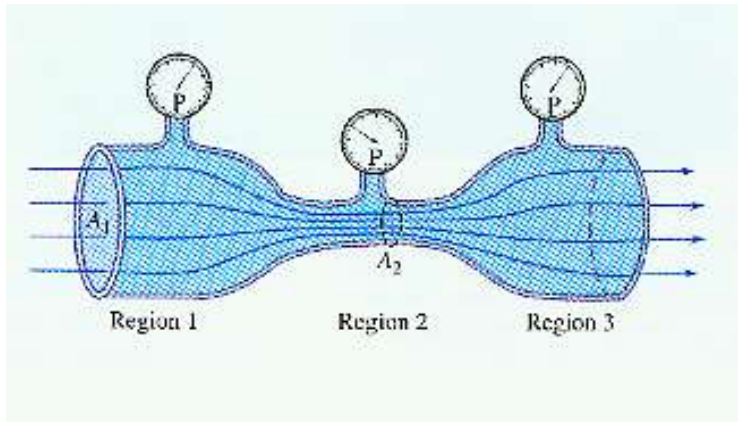
Απάντηση:  $v=0,5 \text{ m/sec}$ ,  $\Delta p=0,03 \text{ atm}$

γ) Ποιο είναι το πιο μακρύ καλαμάκι που μπορεί να λειτουργεί;

Απάντηση: περίπου 10 m



# Φαινόμενο Venturi



Εξ. Συνέχειας:  $A_1 u_1 = A_2 u_2$  ( $A_1 > A_2$ )

Εξ. Bernoulli:  $p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g h_2$

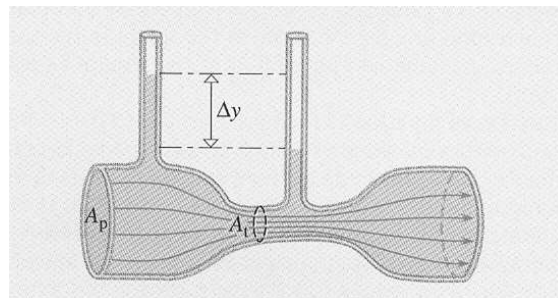
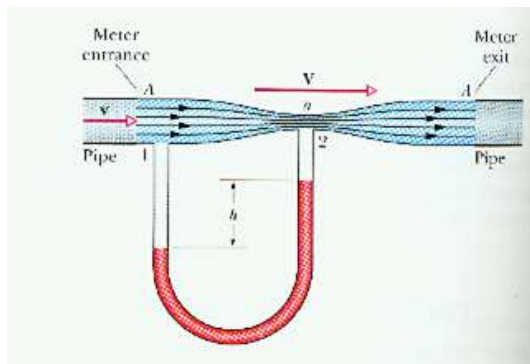
για  $h_1 \cong h_2$ :  $p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2$

και αντικαθιστώντας από την εξ. συνέχειας:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 \frac{(A_1^2 - A_2^2)}{A_1^2}$$

Αφού  $A_1 > A_2$  τότε και  $p_1 > p_2$ .

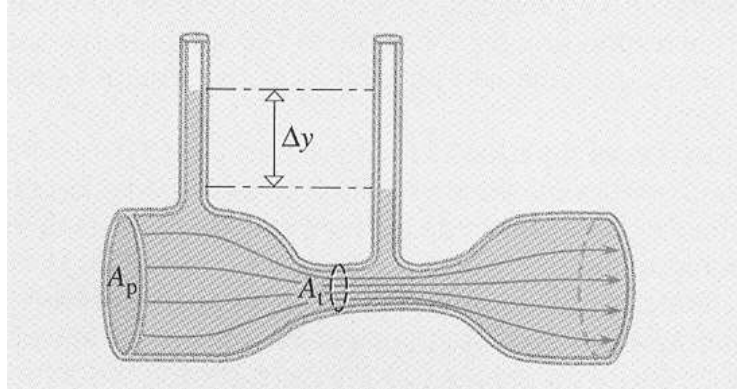
Όταν το ρευστό εισέρχεται στην περιοχή 3, επιβραδύνεται εξαιτίας της υψηλότερης πίεσης και αποκτά την αρχική του ταχύτητα (της περιοχής 1).



**Η μείωση της πίεσης που συνοδεύεται από αύξηση της ταχύτητας του ρευστού ονομάζεται φαινόμενο Venturi** από τον Ιταλό ερευνητή που πρώτος το μελέτησε (1791).

## ΑΣΚΗΣΗ 30

Η στάθμη του στελέχους που βρίσκεται κάθετα στην περιοχή όπου ο ανομοιόμορφος εικονιζόμενος σωλήνας έχει διατομή  $A_p = 200\text{cm}^2$ , εμφανίζει διαφορά  $\Delta y = 5\text{cm}$  ως προς το ύψος της σε σχέση με τη στάθμη στο κατακόρυφο στέλεχος όπου η διάμετρος του «στενού λαιμού» του σωλήνα είναι  $d = 10\text{cm}$ . Υπολογίστε την παροχή του υγρού στον σωλήνα. (Θεωρείστε ιδανικό το υγρό,  $g = 9,8\text{m/s}^2$ )



### ΛΥΣΗ

$$A_p = 200\text{cm}^2$$

$$A_1 = \pi (d/2)^2 = 78,54\text{cm}^2$$

$$\text{Εξ. συνέχειας: } A_p v_p = A_1 v_1 \quad (1)$$

$$\text{Εξ. Bernoulli: } p + \frac{1}{2} \rho v^2 + h = \text{σταθ.}$$

$$\text{και αφού } h_p = h_1: p_p + \frac{1}{2} \rho v_p^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) } p_p - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \frac{A_p^2 - A_1^2}{A_p^2} \quad (3)$$

$$\text{Αλλά, όπως φαίνεται από το σχήμα } p_p - p_1 = \rho g \Delta y \quad (4)$$

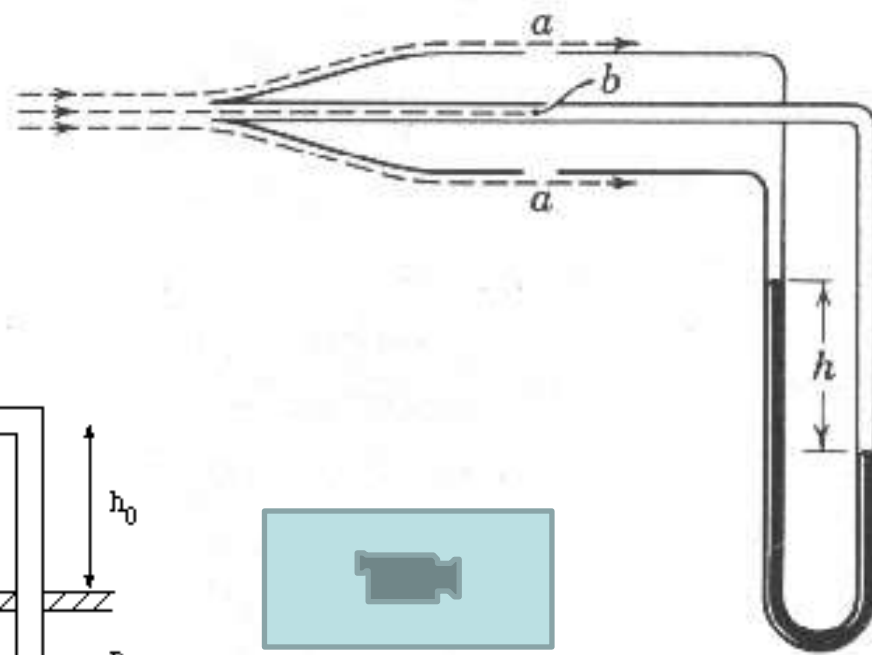
Από (3) και (4):

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 \frac{A_p^2 - A_1^2}{A_p^2} = \rho g \Delta y \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g \Delta y \frac{A_p^2}{A_p^2 - A_1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot 9,8\text{m/s}^2 \cdot 0,05\text{m} \cdot 1,18} = 1,0764\text{m/s}$$



# Σωλήνας Pitot

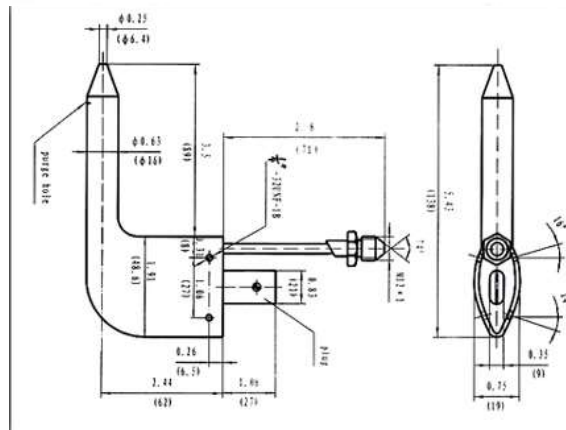
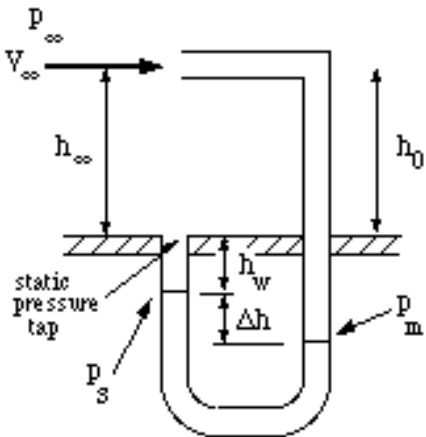


$$p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_b \quad (\text{Bernoulli})$$

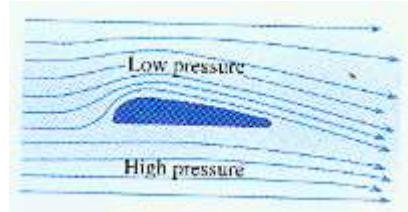
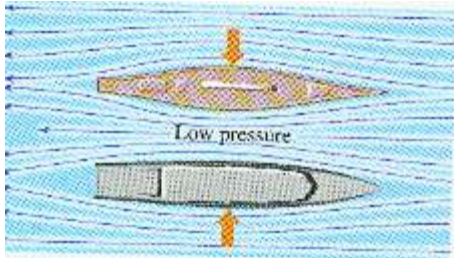
$$p_a + \rho' g h = p_b$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \rho' g h$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}$$

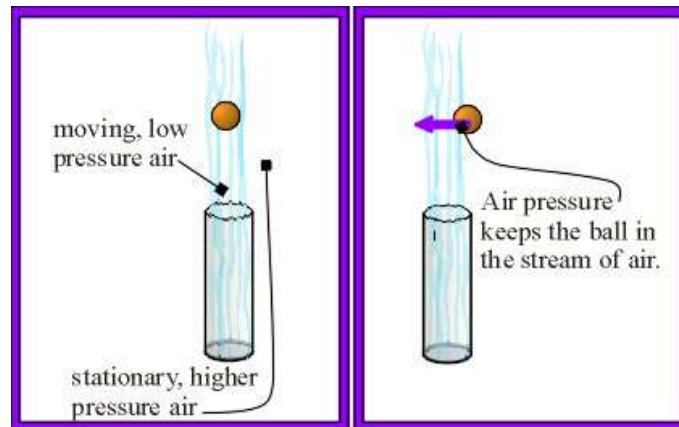
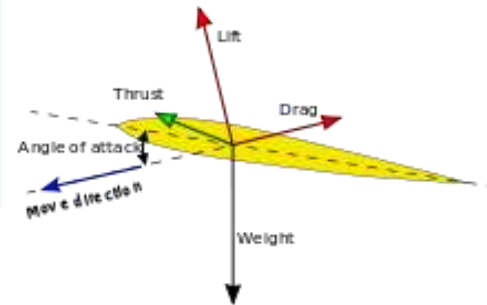
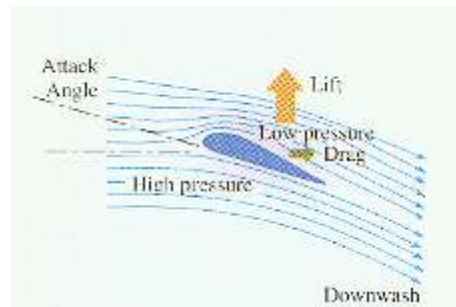
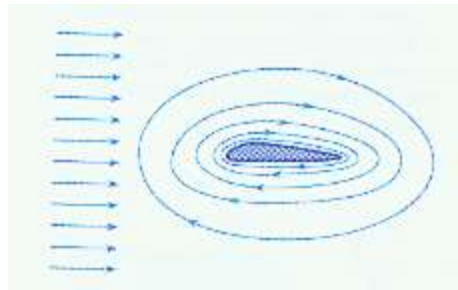


# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



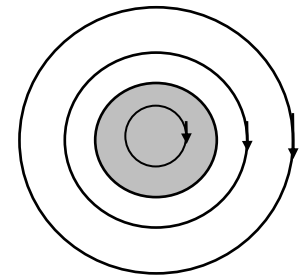
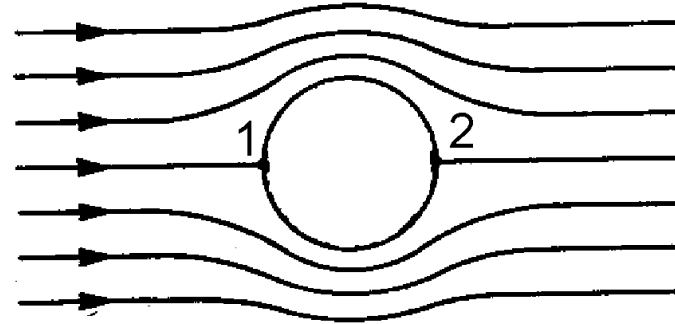
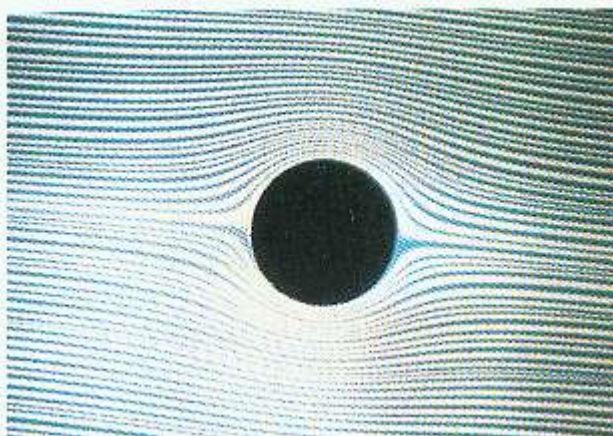
## Basic mechanics of bird flight

- Lift
- Gliding
- Flapping
- Drag

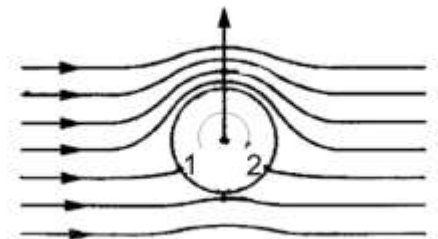


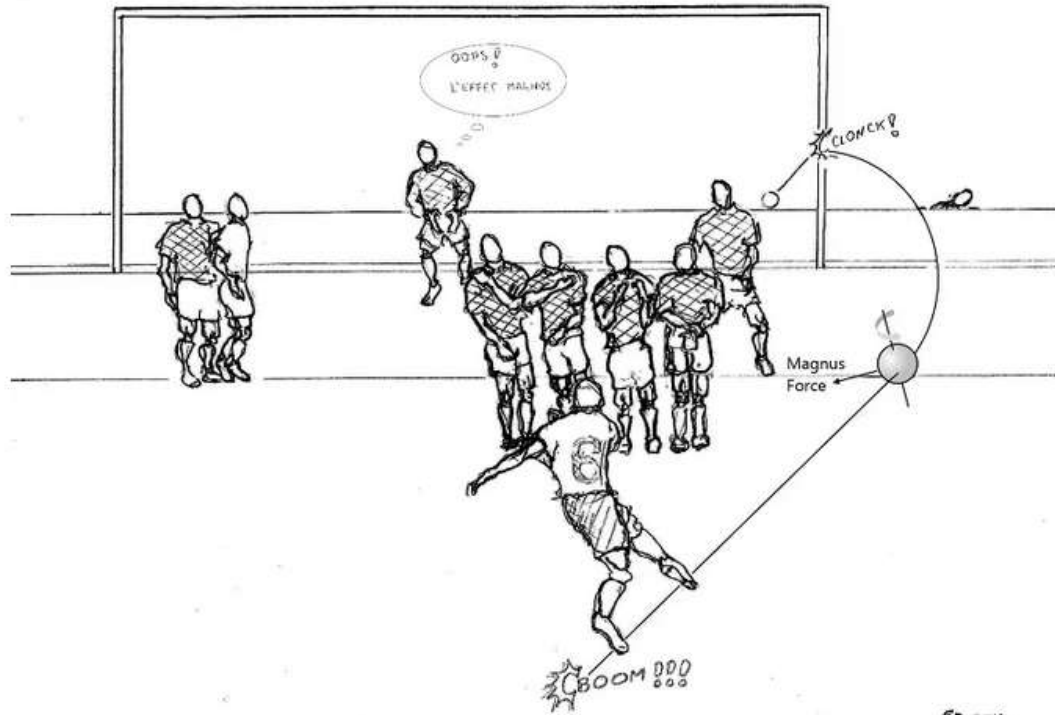
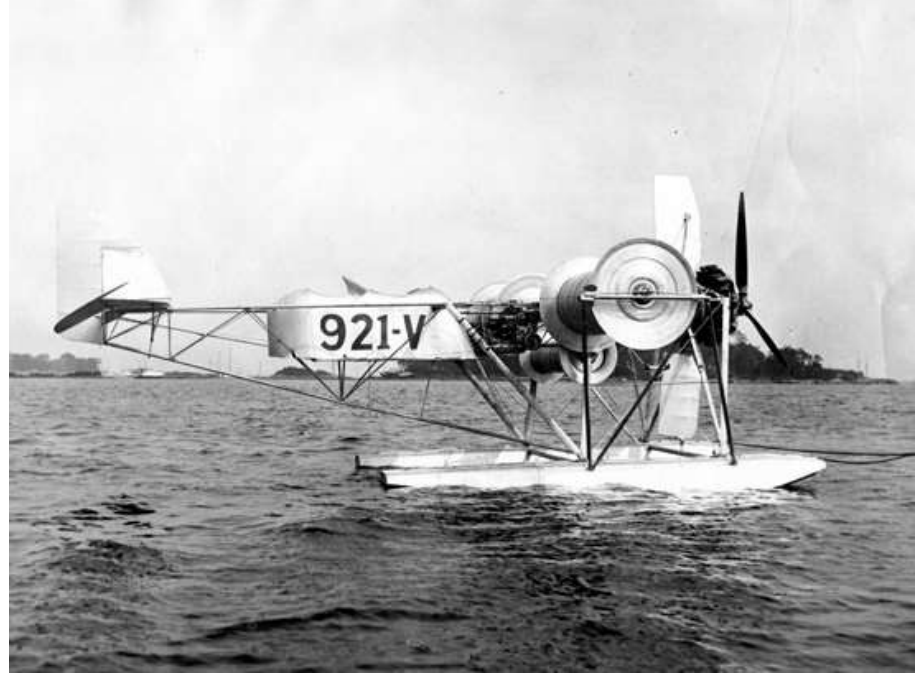
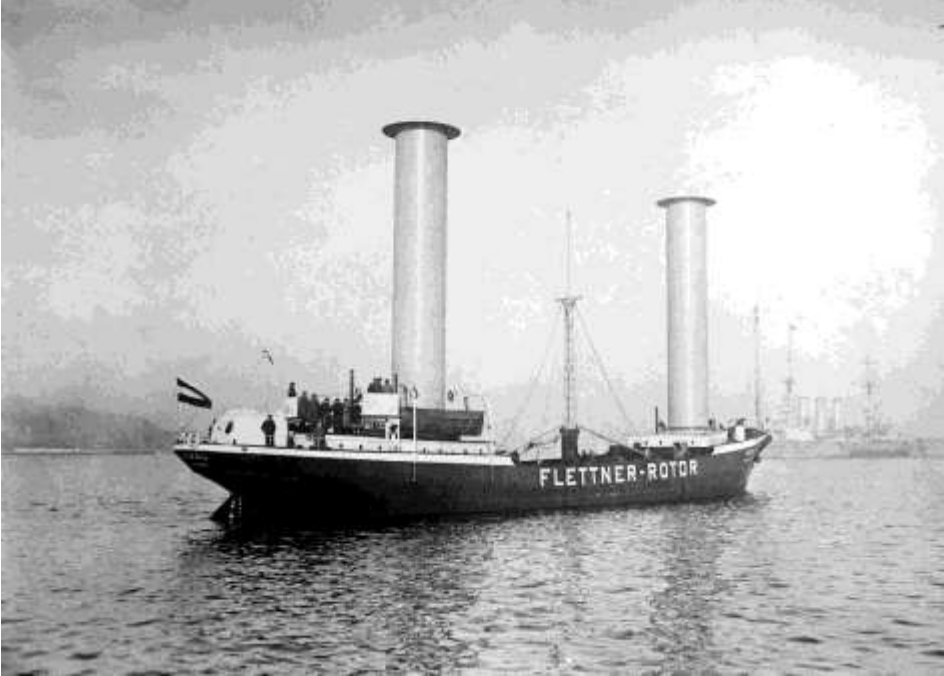
# Προς τα πραγματικά ρευστά – Φαινόμενο Magnus

Στα ιδανικά ρευστά δεν δεχόμαστε την ύπαρξη δυνάμεων συνάφειας μεταξύ αυτών και του στερεού, σε σχέση με το οποίο κινούνται. Γι' αυτό κατά τη ροή ιδανικού ρευστού γύρω από ακίνητο κύλινδρο οι ρευματικές γραμμές παίρνουν μορφή εντελώς συμμετρική και από τις δύο πλευρές του, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ισοκατανομή των πιέσεων.



Έστω τώρα ότι το ρευστό είναι πραγματικό και ότι παραμένει ακίνητο ενώ ο κύλινδρος εκτελεί περιστροφική κίνηση. Το ρευστό παρασύρεται, λόγω δυνάμεων συνάφειας μεταξύ κυλίνδρου και ρευστού, σε περιστροφική κίνηση και οι ρευματικές γραμμές είναι περιφέρειες κύκλων ομόκεντρων με την τομή του κυλίνδρου.

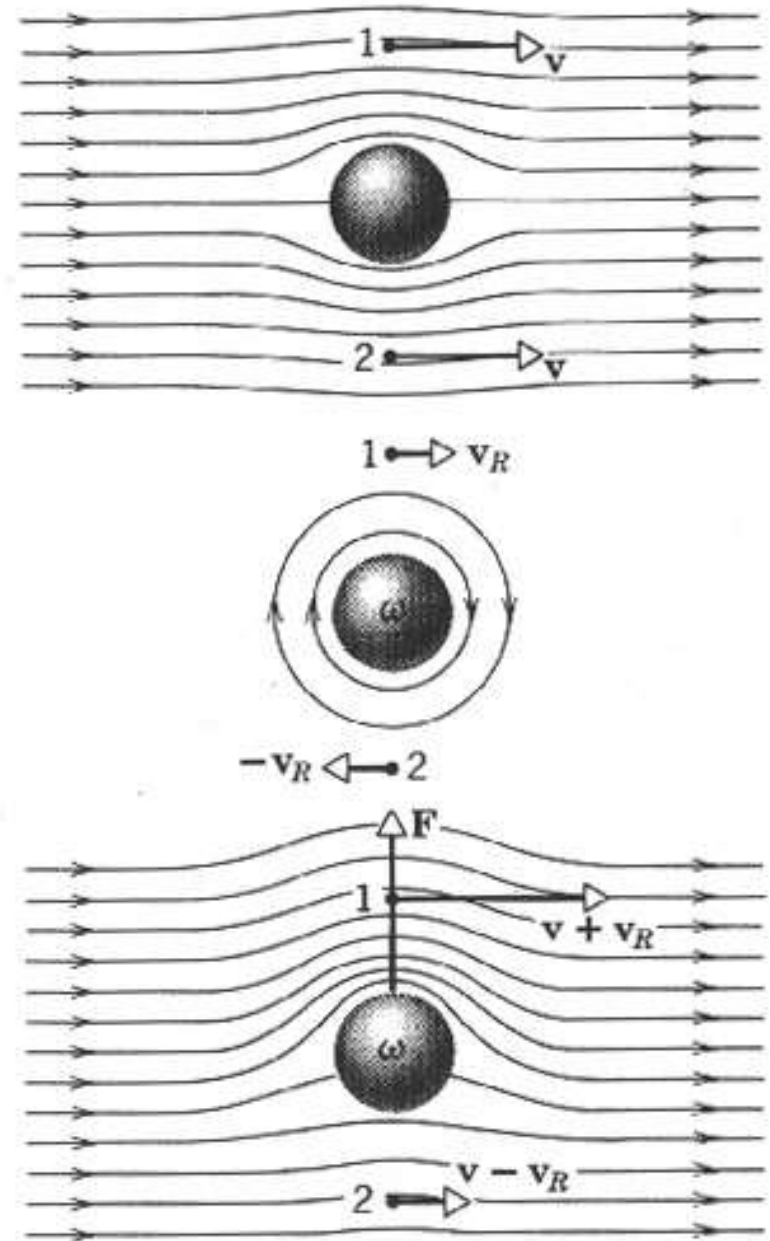




# Η δυναμική άνωση

Δυναμική άνωση είναι η δύναμη που δρα πάνω σε ένα σώμα, όπως είναι μια πτέρυγα αεροπλάνου, ένας υδροολισθητήρας ή μια μπάλα που στριφογυρίζει, *ως αποτέλεσμα της κίνησης του μέσα σε ένα ρευστό.*

Πρέπει να τη διακρίνουμε από τη στατική άνωση, που είναι η δύναμη που εξασκείται πάνω σε ένα σώμα, όπως ένα μπαλόνι, σύμφωνα με την Αρχή του Αρχιμήδη.



## ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΦΕΒ. 2017

Το φαινόμενο στο οποίο στηρίζεται η ανύψωση του αερόστατου, είναι όμοιο με αυτό που χρησιμοποιούν:

**A)** τα πουλιά για να πετάξουν

**B)** τα ψάρια για να μεταβάλλουν το βάθος στο οποίο κινούνται

**Γ)** τα πουλιά για να πετάξουν και τα ψάρια για να μεταβάλλουν το βάθος στο οποίο κινούνται

**Δ)** κανένα από τα παραπάνω

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.