ΡΕΥΣΤΑ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΠΙΕΣΗ: Το μέτρο της δύναμης F που δρα κάθετα και κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια A στην μονάδα της επιφάνειας αυτής.

$$p = \frac{F}{A}$$

(Βαθμωτό ή μονόμετρο μέγεθος)

ΜΟΝΑΔΕΣ ΠΙΕΣΗΣ

S.I. 1 Pascal = 1 Pa = 1 N/m^2

1 atm = 1.01 x 10^5 Pa Η πίεση της γήινης ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της θάλασσας

1 Torr = 1 mm Hg (1 atm = 760 mm Hg)

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ (ΒΑΡΟΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ)

Αν p_o η πίεση στην επιφάνεια της γης, όπου y = 0, η πίεση p_y σε ΥΨΟΣ y > 0 θα είναι:

Όπου: M ≈ 29 amu, η μέση μοριακή μάζα του ατμοσφαιρικού αέρα

R = 8,314 joule / mol·K, η παγκόσμια σταθερά των αερίων

T απόλυτη θερμοκρασία (K)

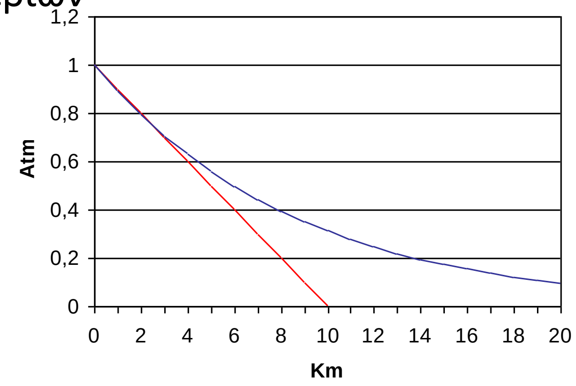
$$p_y = p_0 e^{-\frac{\mathrm{gM}}{\mathrm{R}T} y}$$

$y > 0$

ΥΨΟΣ h

$h = y$

<u>Σημ.:</u> Προσέξτε την εκθετική μπλε (αντί γραμμικής - κόκκινη) πτώση της ατμοσφαιρικής πίεσης καθ' ύψος



ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Άν p_0 η πίεση στην επιφάνεια του ρευστού όπου y = 0, η πίεση p_y σε ΒΑΘΟΣ y < 0 θα είναι:

ΒΑΘΟΣ h

$h = -y$

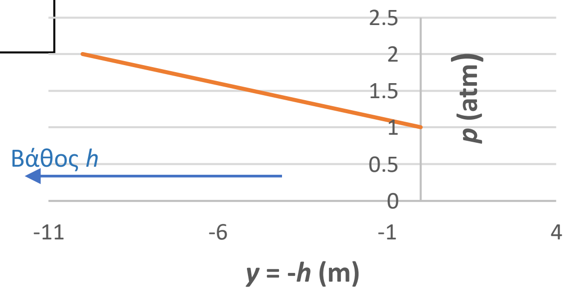
$$p_y = p_0 - \rho g y$$

Αν το βάθος δίνεται με την απόλυτη τιμή του h, τότε επειδή ***y* = - *h*,** η εξίσωση έχει τη γνωστή μορφή:

$$p_h = p_0 + \rho g h$$

$y < 0$

Η υπερπίεση $\rho g h$ καλείται **υδροστατική πίεση**

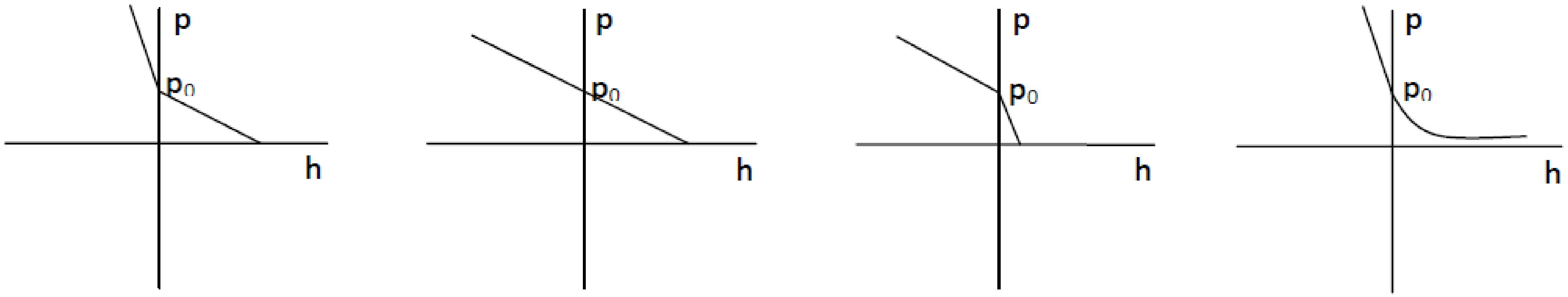


<u>Σημ.:</u> Προσέξτε τη γραμμική αύξηση της πίεσης σε συνάρτηση με το βάθος h

Ερώτηση κλειστού τύπου

(I) Ποιο από τα ακόλουθα διαγράμματα παριστάνει καλύτερα την πίεση που δέχεται ένα σώμα σε συνάρτηση με το βάθος ($h < 0$) που βρίσκεται στη θάλασσα και το ύψος ($h > 0$) πάνω από αυτήν στον αέρα (p_0 = 1 atm). Απ.: **Δ.** Γραμμικής πτώση της πίεσης p για $h < 0$, και εκθετική πτώση για $h > 0$

(II) Ποιο θα ήταν το καταλληλότερο διάγραμμα αν η θεμελιώδης εξίσωση της αεροστατικής (βαρομετρική)ήταν της ίδιας μορφής με τη θεμελιώδη εξίσωση της υδροστατικής, δηλαδή γραμμική; Απ.: **Α.** Η κλίση της γραμμικής σχέσης $p(h)$ είναι $\rho \cdot g$.
Για $h < 0$, $\rho = \rho_{θαλ.\ νερου} >> \rho_{ατμ.\ αέρα}$ για $h > 0$



(A) (B) (Γ) (Δ)

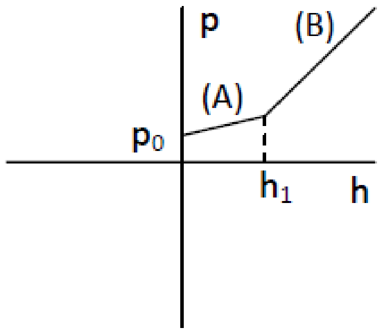
Ερώτηση κλειστού τύπου

I) Ποιο από τα ακόλουθα διαγράμματα αποδίδει ορθότερα την υδροστατική πίεση σε συνάρτηση με το βάθος σε μίγμα λαδιού-νερού στο οποίο η διεπιφάνεια λαδιού-νερού παρατηρείται σε βάθος h_1 από την επιφάνεια του μίγματος στον αέρα;

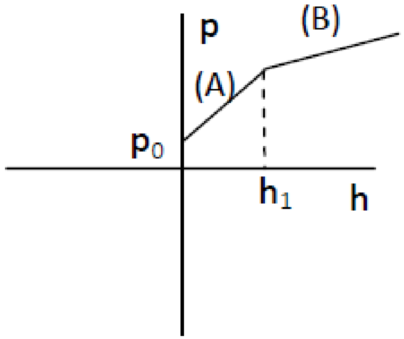
II) Αν η κλίση στο τμήμα (A) του διαγράμματος είναι 6500 $kg/m^2 \cdot s^2$, πόση είναι η πυκνότητα του λαδιού;

III) Πόση είναι η κλίση στο τμήμα (B) του διαγράμματος;

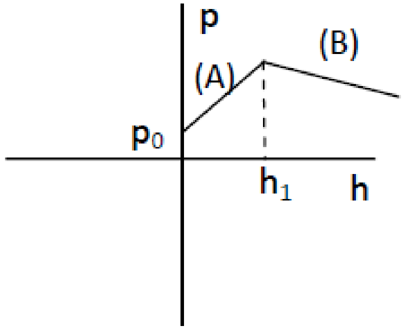
(α)



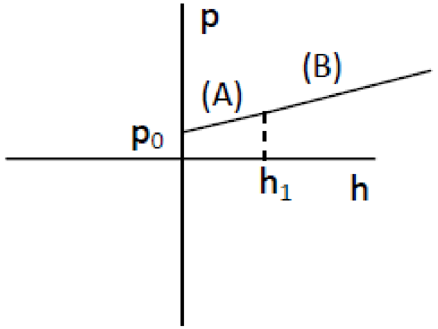
(β)



(γ)



(δ)



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\boxed{p_h = p_0 + \rho g h}$$

I) Η κλίση της γραμμικής σχέσης $p(h)$ είναι $\rho \cdot g$
Αφού το λάδι επιπλεέι στο νερό: $\rho = \rho_{λαδιού} < \rho_{νερού}$
Άρα η κλίση στο λάδι (που βρίσκεται σε $h < h_1$) είναι μικρότερη από την κλίση στο νερό (που βρίσκεται σε $h > h_1$). Επομένως, σωστό είναι το διάγραμμα **(α)**

II) $\rho_{λαδιού} \cdot g$ = 6500 $kg/m^2 \cdot s^2$ =

Ερώτηση κλειστού τύπου

Μια τετράγωνη πλάκα πλευράς 1 m βρίσκεται στο έδαφος σε εξωτερικό χώρο εκτεθειμένη στον αέρα.
Μια ίδια πλάκα βρίσκεται σε έναν αεροστεγή θάλαμο κενού με άμμο στοιβαγμένη πάνω της. Πόση πρέπει να είναι η μάζα της άμμου ώστε η προς τα κάτω δύναμη που ασκείται και στις δύο πλάκες να είναι η ίδια;

Περίπου
(α) 10.000 kg.
(β) 1000 kg.
(γ) 100 kg.
(δ) 1 kg.

Απάντηση: Δεδομένου ότι η ατμοσφαιρική πίεση σε μηδενικό υψόμετρο είναι
$1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N/m}^2$
σε κάθε m^2, άρα και στην τετράγωνη πλάκα πλευράς 1 m, ασκείται κάθετη σε αυτό δύναμη μέτρου $F = 10^5$ N
Επομένως, το βάρος της άμμου που ισούται με αυτή τη δύναμη είναι:
$W = 10^5$ N
και στο βαρυτικό πεδίο της γης με g περίπου 10 m/s^2
$W = m \cdot g = 10^5 \text{ N} \Rightarrow m = 10^4$ kg (δηλ. περίπου 10 τόνοι)
Άρα η σωστή απάντηση είναι η (α)

ΑΝΩΣΗ – ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

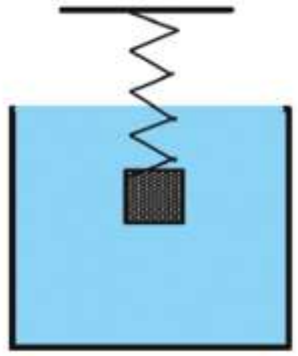
Σε ένα στερεό σώμα πυκνότητας $\rho_{σώματος}$ και όγκου V, βυθισμένο κατά $V_{βυθ.}$ σε ρευστό πυκνότητας $\rho_{ρευστού}$ ασκείται, εκτός από τη βαρυτική δύναμη μέτρου $\boldsymbol{W = m_{σώματος}\, g = \rho_{σώματος}\, g\, V}$ και η **άνωση (Buoyancy)**, δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης από τη βαρυτική δύναμη και μέτρου:

$$\boldsymbol{F_B = \rho_{ρευστού}\, g\, V_{βυθ}}$$

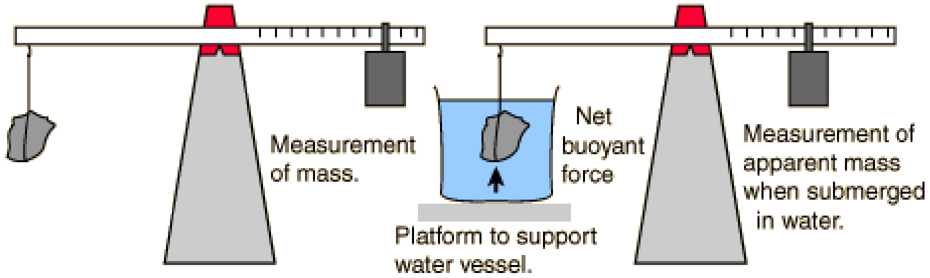
Όπου $V_{βυθ}$ ο όγκος του ρευστού που εκτοπίζεται από το βυθισμένο σώμα.

Αφού $\rho_{ρευστού}\, g\, V_{βυθ} = m_{ρευστού.}\, g$, το μέτρο της άνωσης **ισούται με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζεται από το σώμα (Αρχή του Αρχιμήδη).**

Φαινόμενο Βάρος



Το φαινόμενο βάρος σώματος βυθισμένου σε ρευστό μειώνεται εξαιτίας της δύναμης της άνωσης.



Φαινόμενο Βάρος = Πραγματικό Βάρος – Άνωση

$$W_{φαινόμενο} = W - F_B = \rho_{σώματος} \cdot V_{σώματος} \cdot g \;-\; \rho_{ρευστού} \cdot V_{βυθισμένο} \cdot g$$

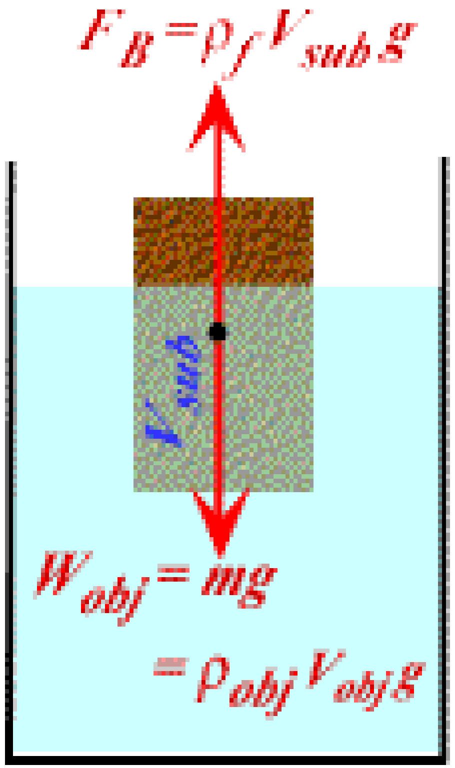
ΠΛΕΥΣΗ

Το σώμα ισορροπεί στο ρευστό.
Η άνωση, η οποία ασκείται στο βυθισμένο τμήμα του, ισούται με το βάρος του

Στο ακόλουθο σχήμα:

$V_{sub} = V_{\beta\upsilon\theta.}$ $\rho_f = \rho_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau.}$ $W_{obj} = W_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma}$

$V_{obj} = V_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma}$ $\rho_{obj} = \rho_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma}$ $W_{obj} = W_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma}$



$$F_B = W_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma}$$

$$\rho_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau.} V_{\beta\upsilon\theta.}\, g = \rho_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma} V_{\sigma\omega\mu\alpha\tau o\varsigma} g$$

$$\frac{V_{\beta\upsilon\theta}}{V_{\sigma\omega\mu}} = \frac{\rho_{\sigma\omega\mu}}{\rho_{\rho\varepsilon\upsilon\sigma\tau}}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το κλάσμα $V_{\beta\upsilon\vartheta} / V_{\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma}$ είναι το κλάσμα του όγκου του σώματος που είναι βυθισμένο στο ρευστό.

- Εάν π.χ. το **70%** του όγκου του σώματος ***είναι βυθισμένο*** στο ρευστό, αυτό σημαίνει ότι **$V_{\beta\upsilon\vartheta} / V_{\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma}$ = 70/100 = 0,7**
- Εάν π.χ. το **40%** του όγκου του σώματος ***προεξέχει*** της επιφάνειας του υγρού, αυτό σημαίνει ότι το 60% του όγκου του σώματος είναι βυθισμένο σε αυτό, **$V_{\beta\upsilon\vartheta} / V_{\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma}$ = 100 - 40/100 = 0,6**

ΠΑΛΑΙΟ ΘΕΜΑ: 1 σώμα (αποτελούμενο από δύο συστατικά) επιπλέει σε ένα υγρό

Μια πλαστική μπάλα (σφαίρα), γεμάτη αέρα, έχει διάμετρο 20 cm και μάζα 300 g.

Α. Πόση είναι η μέση πυκνότητα της μπάλας;

Β. Αν την πετάξουμε στη θάλασσα, τι ποσοστό του όγκου της προεξέχει από την επιφάνεια της θάλασσας;

Γ. Αν ο αέρας στο εσωτερικό της καταλαμβάνει το 92,5% του συνολικού όγκου της πόση είναι η πυκνότητα του πλαστικού υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένη;(Υπόδειξη: Για σώματα που αποτελούνται από δύο υλικά, Α και Β, η μέση πυκνότητά τους $\bar{\rho}$ υπολογίζεται από την εξίσωση: $\bar{\rho} = X_A\rho_A + X_B\rho_B$, όπου ρ_A και ρ_B οι πυκνότητες των υλικών Α και Β αντίστοιχα, και $X_A = V_A/V$, $X_B = V_B/V$ το ποσοστό το συνολικού όγκου του σώματος V που καταλαμβάνουν τα Α και Β αντίστοιχα.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ: $V_{σφαίρας} = (4/3)\pi r^3$, $\rho_{θαλ.\ νερού} = 1025\ kg/m^3$, $\rho_{αέρα} = 1,2\ kg/m^3$

ΛΥΣΗ

Α. $r = 10\ cm = 0,1\ m$

$m = 300\ g = 0,3\ kg$

$V = (4/3)\pi r^3 = 0.004178\ m^3 = 4,187 \cdot 10^{-3}\ m^3$

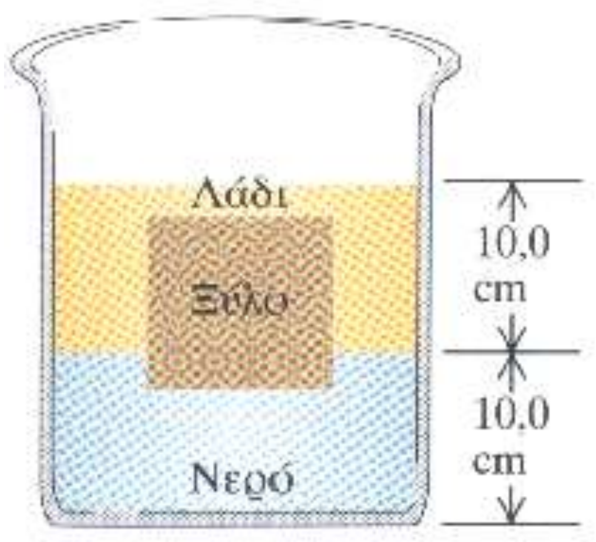
Μέση πυκνότητα μπάλας: $\bar{\rho} = m/V = 71,656\ kg/m^3$

Β. $\frac{V_{βυθ}}{V} = \frac{\rho_{μπαλ}}{\rho_{θαλ.νερ.}} \Rightarrow \frac{V_{βυθ}}{V} = \frac{71,656\ kg/m^3}{1025\ \ kg/m^3} \approx 0,07$ ή 7%. Άρα προεξέχει το 93% περίπου.

Γ. $\bar{\rho} = \frac{V_{a;e}}{V}\rho_{αερ} + \frac{V_{πλαστ.}}{V}\rho_{πλαστ} \Rightarrow 71,656\frac{kg}{m^3} = 0,925 \cdot 1,2\frac{kg}{m^3} + 0,075 \cdot \rho_{πλαστ} \Rightarrow \rho_{πλαστ} = 940,61\ \frac{kg}{m^3}$

ΑΣΚΗΣΗ (Ένα σώμα επιπλέει βυθισμένο σε δύο, μη αναμιγνυόμενα υγρά)

Ένα κυβικό κομμάτι ξύλου με ακμή 10 cm επιπλέει στη διεπιφάνεια μεταξύ λαδιού και νερού με την κάτω επιφάνεια του 2cm κάτω από τη διεπιφάνεια (βλέπε σχήμα). Η πυκνότητα του λαδιού είναι 650 kg/m^3 και του νερού 1000 kg/m^3 (g = 9,8 m/s^2). Πόση είναι η μάζα του ξύλου;



ΛΥΣΗ

Το βάρος του ξύλου W_ξ, εξισορροπείται από την άνωση που δέχεται το ξύλο από το νερό $F_{B,v}$ και από το λάδι $F_{B,\lambda}$

$W_\xi = F_{B,v} + F_{B,\lambda}$

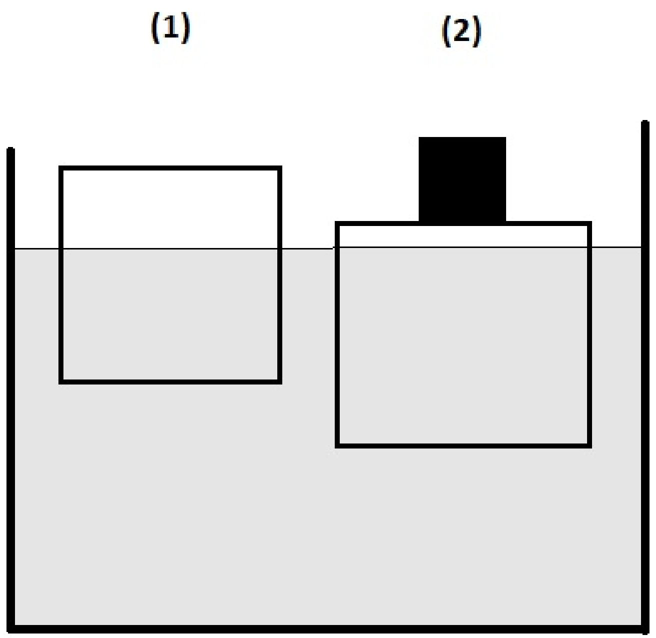
$m_\xi \, g = \rho_v \cdot g \cdot V_v + \rho_{\lambda\alpha\delta} \cdot g \cdot V_\lambda$

$V_v = 2 \cdot 100 \text{ cm}^3$

$V_\lambda = 8 \cdot 100 \text{ cm}^3$

Επομένως, $m_\xi = 0,72$ kg

ΠΑΛΑΙΟ ΘΕΜΑ (Δύο σώματα επιπλέουν σε ένα υγρό)



Ένα κυβικό κομμάτι ξύλου επιπλέει στο νερό με τα 2/5 του συνολικού του όγκου να προεξέχουν της ελεύθερης επιφάνειας του νερού [Σχ. 1]. Στη συνέχεια τοποθετούμε στην επάνω επιφάνεια του ξύλου έναν κύβο από χαλκό [Σχ.2]. Εάν η πυκνότητα του χαλκού είναι περίπου 9.000 kg/m^3 και η ακμή (πλευρά κάθε τετραγωνικής έδρας του) του χάλκινου κύβου είναι το 1/3 της ακμής του ξύλινου κύβου, πόσο είναι τώρα το κλάσμα του όγκου του ξύλου που είναι βυθισμένο στο νερό; ($\rho_{νερού}$ = 1.000 kg/m^3, θεωρείστε κάθε άνωση από τον ατμοσφαιρικό αέρα αμελητέα).

ΛΥΣΗ

(1) Αφού τα τα 2/5 του όγκου του ξύλου προεξέχουν, $\frac{V_{βυθ}}{V} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$$\frac{V_{βυθ}}{V} = \frac{\rho_{ξυλ}}{\rho_{νερ}} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\rho_{ξυλ}}{\rho_{νερ}} \Rightarrow \rho_{ξυλ} = \frac{3}{5}\rho_{νερ} \Rightarrow \rho_{ξυλ} = 600\ \mathrm{kg/m^3}$$

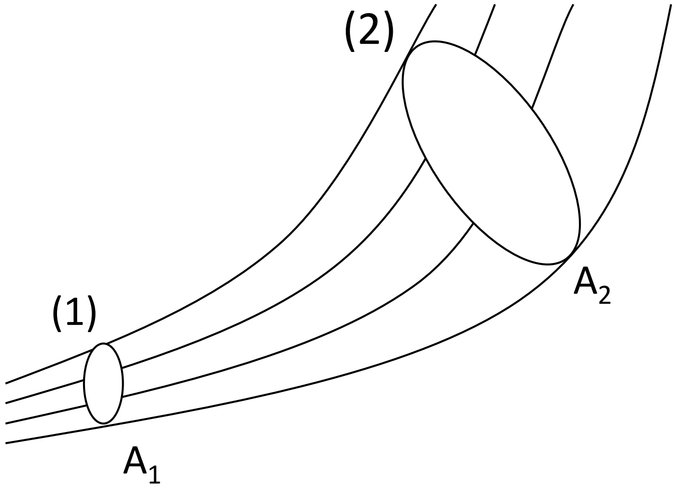
(2) $V_{χαλ} = \left(\frac{α}{3}\right)^3 = \frac{α^3}{27} \Rightarrow V_{χαλ} = \frac{V_{ξυλ}}{27} \Rightarrow \frac{V_{χαλ}}{V_{ξυλ}} = \frac{1}{27} \qquad (*)$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W_{ξυλ} + W_{χαλ} - F_B = 0 \Rightarrow \rho_{ξυλ}V_{ξυλ}\,g + \rho_{χαλ}V_{χαλ}\,g - \rho_{νερ}V'_{βυθ}\,g = 0 \Rightarrow \frac{\rho_{ξυλ}V_{ξυλ}}{V_{ξυλ}} + \frac{\rho_{χαλ}V_{χαλ}}{V_{ξυλ}} = \frac{\rho_{νερ}V'_{βυθ}}{V_{ξυλ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{ξυλ}}{\rho_{νερ}} + \frac{\rho_{χαλ}}{\rho_{νερ}}\frac{V_{χαλ}}{V_{ξυλ}} = \frac{V'_{βυθ}}{V_{ξυλ}} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{V'_{βυθ}}{V_{ξυλ}} = \frac{600}{1000} + \frac{9000}{1000}\cdot\frac{1}{27} \Rightarrow \frac{V'_{βυθ}}{V_{ξυλ}} = \frac{14}{15} = 0{,}933 = 93{,}3\ \%$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



Το ρευστό δεν διαπερνά το πλευρικό τοίχωμα σε κανένα σημείο του.

(1): το ρευστό **κινείται με ταχύτητα υ_1**.
Στο **χρονικό διάστημα dt**, ένα «σωματίδιο» ρευστού θα διανύσει **απόσταση υ_1 dt** και όγκος
$dV = A_1 \upsilon_1 dt$ θα περάσει από την A_1.
Αφού το ρευστό είναι ***ασυμπίεστο*** ο ίδιος όγκος θα περάσει από το **C.**
(2): Εάν η ταχύτητα εκεί είναι υ_2 τότε:

$$dV = A_1 \upsilon_1 dt = A_2 \upsilon_2 dt$$

ή $$A_1 \upsilon_1 dt = A_2 \upsilon_2 dt$$

ή $$Q = dV/dt = A\upsilon = \text{σταθ.}$$

(ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ)

Παροχή φλέβας Q ονομάζεται ο όγκος dV ρευστού που διέρχεται από μία διατομή της σε χρόνο dt, διά του χρόνου αυτού:
Q = dV/dt Μονάδα μετρήσεως της παροχής είναι το 1 m^3/sec ή 1 cm^3/sec.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

- Η ροή είναι ταχύτερη στα στενότερα τμήματα ενός σωλήνα όπου οι ρευματικές γραμμές είναι πυκνότερες
- Είναι μια έκφραση της ***αρχής διατήρησης της μάζας*** (αφού θεωρήσαμε ότι ρ = σταθ.)

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Άσκηση

Ένα λάστιχο ποτίσματος εσωτερικής διαμέτρου D = 2 cm συνδέεται με ένα ραντιστήρι που αποτελείται απλώς από ένα κλειστό περίβλημα με 24 τρύπες, η καθεμιά διαμέτρου d = 0,12 cm. Αν το νερό στο λάστιχο έχει ταχύτητα 1 m/sec, με ποια ταχύτητα φεύγει το νερό από τις τρύπες του ραντιστηριού;

Δίνονται: $A = \pi r^2 = \pi(d/2)^2 = \pi d^2/4$ είναι το εμβαδόν κυκλικής διατομής ακτίνας r και επομένως διαμέτρου $d = 2r$

ΛΥΣΗ

Διάμετρος του ποτιστικού σωλήνα: $D = 2\text{cm} = 2\times10^{-2}$ m
Διάμετρος οπής: $d = 0{,}12\text{cm} = 1{,}2\times10^{-3}$ m
Ταχύτητα νερού στο σωλήνα: $\upsilon_{\sigma\omega\lambda.} = 1\text{m/s}$

Εξ. συνέχειας: $Q = dV/dt = A\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$
Επομένως, $A_{\sigma\omega\lambda.}\upsilon_{\sigma\omega\lambda.} = A_{o\pi\acute{\omega}\nu}\upsilon_{o\pi.}$

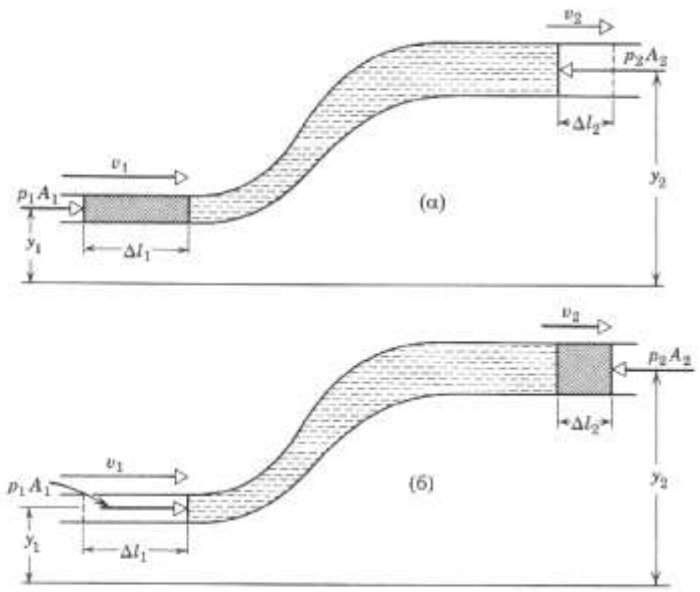
$$\pi(D/2)^2\,1m/s = 24\pi(d/2)^2\,\upsilon_{o\pi.} \Rightarrow \upsilon_{o\pi.} = \frac{1}{24}\frac{D^2}{d^2}m/s \Rightarrow \upsilon_{o\pi.} = 11{,}574\,m/s$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

(για στρωτή, ασυμπίεστη, χωρίς εσωτερικές τριβές ροή)

Εκφράζει την ***Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας*** *στον φορμαλισμό της ρευστομηχανικής*



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g y = \sigma\tau\alpha\theta.$$

- Η πίεση p ονομάζεται **στατική**, είναι εκείνη που θα μετρηθεί με μανόμετρο τοποθετημένο στη φλέβα, και συνδέεται με τις δυνάμεις που προκαλούν τη ροή του ρευστού. Μπορεί να λεχθεί ότι η στατική πίεση είναι, στην περίπτωση αυτή, το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις αυτές σε κάθε μονάδα όγκου του ρευστού.

- Η πίεση $1/2\rho\upsilon^2$ ονομάζεται **δυναμική** και συνδέεται με την κινητική ενέργεια του ρευστού, είναι δηλαδή η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου.

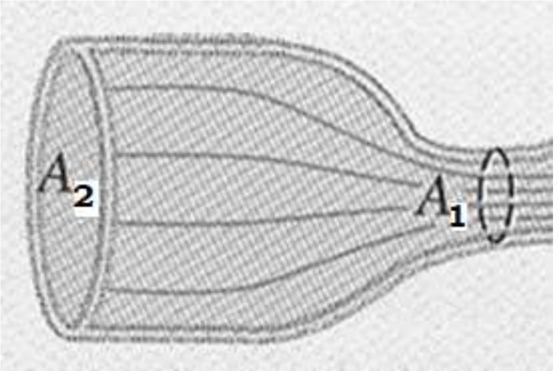
- Ο όρος ρgh είναι η **υδροστατική** πίεση που συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια, δηλαδή απεικονίζει την επίδραση του πεδίου βαρύτητας στην κίνηση του ρευστού.

Επομένως ο νόμος του Bernoulli εκφράζει ότι ***κατά τη ροή ιδανικού ρευστού το άθροισμα της στατικής πίεσης p, της υδροστατικής ρgh και της δυναμικής $1/2\rho\upsilon^2$, κατά μήκος μιας φλέβας παραμένει σταθερό***.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ

Υπολογίστε τη μεταβολή της στατικής πίεσης υγρού στην περίπτωση που αυτό ρέει σε οριζόντια φλέβα η ακτίνα της οποίας υποτριπλασιάζεται ($r_2 = 3r_1$). Υποθέστε ότι η ταχύτητα της ροής του υγρού στην ευρεία περιοχή (A_2) είναι υ_2 = 50 cm/s. Η πυκνότητα του υγρού είναι 1050 kg/m^3.



Δίνονται: $A = \pi r^2$ το εμβαδόν κυκλικής διατομής ακτίνας r

ΛΥΣΗ

Οριζόντια φλέβα → $y_1 = y_2$ $\quad$ $r_2 = 3r_1$ $\quad$ και $\quad$ $\upsilon_2 = 50$ cm/s

Από Εξ. Bernoulli: $p_1 + ½ \rho\upsilon_1^2 = p_2 + ½ \rho\upsilon_2^2 \Leftrightarrow \Delta p = p_2 - p_1 = ½ \rho (\upsilon_1^2 – \upsilon_2^2)$ (1)

Εξ. Συνέχειας: $A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$

$\pi r_1^2 \upsilon_1 = \pi r_2^2 \upsilon_2 \Leftrightarrow \upsilon_1 = (r_2/r_1)^2 \upsilon_2$ (2)

(1), (2) και αφού $r_2 = 3r_1$

$\Delta p = ½ \rho ((r_2/r_1)^4 \upsilon_2^2 – \upsilon_2^2) = ½\, 80\, \rho\, \upsilon_2^2 = 10500$ Pa

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ

α) Υπό ποιες προϋποθέσεις ένα ρευστό ικανοποιεί: (i) την εξίσωση συνέχειας (ii) την εξίσωση Bernoulli;

β) Σε κάποιο σημείο ενός σωλήνα ύδρευσης, η ταχύτητα του νερού είναι 4 m/s και η στατική πίεση 5×10^4 Pa. Βρείτε την στατική πίεση σε ένα άλλο σημείο του σωλήνα, που είναι 12m χαμηλότερα από το πρώτο και όπου η διατομή έχει εμβαδόν υποδιπλάσιο από αυτό στο ψηλότερο σημείο ($\rho = 10^3$ kg/m^3, g = 9,8 m/s^2).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) (i) Ασυμπίεστο ρευστό (ρ=σταθ.)
(ii) Ασυμπίεστο ΚΑΙ χωρίς ιξώδες ρευστό

β) Σημείο (1): $\upsilon_1 = 4$ m/s $p_1 = 5 \times 10^4$ Pa.
Σημείο (2): $A_2 = (½)A_1$ $y_1 - y_2 = 12$ m $p_2 =$;

Εξ. Συνέχειας

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Leftrightarrow \upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2 = 2\upsilon_1$$

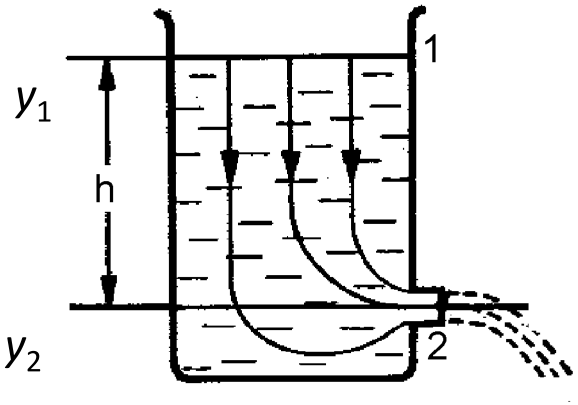
Εξ. Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

$$\boldsymbol{p_2} = p_1 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) + \rho g(y_1 - y_2) =$$
$$= 5 \cdot 10^4 Pa + 10^3\left(-\frac{3}{2}16 + 9{,}8 \cdot 12\right)\mathrm{Pa} =$$
$$= 5 \cdot 10^4 Pa + 9{,}36 \cdot 10^4 Pa = \mathbf{14,36 \cdot 10^4 Pa}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Θεώρημα Torricelli



'Εστω ότι στο κάτω σημείο (y_2) δοχείου που είναι γεμάτο με κάποιο υγρό υπάρχει ένα μικρό άνοιγμα εκροής. Δεδομένου ότι $y_1 - y_2 = h$ (= το βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια που βρίσκεται το άνοιγμα εκροής), η εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli στο σημείο 1 (y_1) της ελεύθερης επιφάνειας και στο σημείο εκροής 2 (y_2) δίνει:

$$\mathrm{p}_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho\mathrm{g}\mathrm{h} = \mathrm{p}_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

<u>Αν θεωρήσουμε ότι το δοχείο (δεξαμενή) είναι ΑΝΟΙΚΤΟ</u> στην ελεύθερη επιφάνεια του (1), τότε $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_{atm}$

Επίσης στο άνοιγμα εκροής (αφού είναι ανοιχτό) ισχύει επίσης ότι $\mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_{atm}$

Επομένως, για αυτήν την περίπτωση η Εξ. Bernoulli γίνεται:

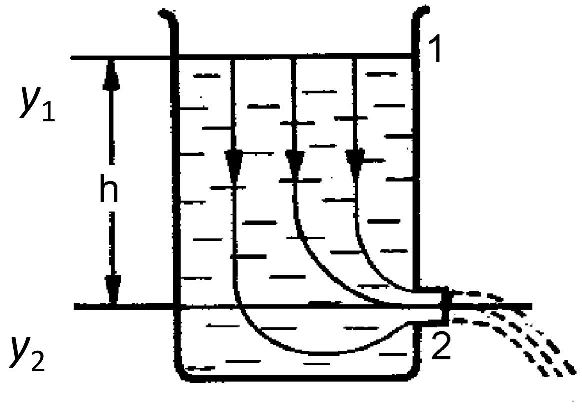
$$\mathrm{p}_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h = \mathrm{p}_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2gh}$$

Και <u>αν θεωρήσουμε ότι</u> το εμβαδόν του ανοίγματος εκροής (π.χ. μια τρύπα) A_2 είναι πολύ μικρότερο από το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας A_1, δηλ. <u>$A_2 << A_1$</u>, τότε η υ_1^2 είναι πολύ μικρότερη από την υ_2^2 ($\upsilon_1^2 << \upsilon_2^2$) [Γιατί; ελέγξτε την Εξ. Συνέχειας] και μπορεί να παραληφθεί.

Έτσι η σχέση για την ταχύτητα εκροής μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο και να γίνει: $\boldsymbol{\upsilon_2 = \sqrt{2gh}}$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Θεώρημα Torricelli



Η ταχύτητα εκροής ενός υγρού από μικρό άνοιγμα που βρίσκεται σε βάθος *h* από την ελεύθερη επιφάνεια μεγάλης ανοικτής δεξαμενής είναι:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$$

Επομένως, η ταχύτητα εκροής του υγρού είναι ίδια με εκείνη που θα είχε ένα σώμα που θα εκτελούσε ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος *h.* Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα του Torricelli**.

Η παροχή στο μικρό άνοιγμα (2) θα δίνεται τότε ως: $Q = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = A_2 \upsilon_2 = A_2\sqrt{2gh}$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ

Στην πλευρική επιφάνεια μεγάλης δεξαμενής νερού υπάρχει κυκλική τρύπα με διάμετρο 2cm, σε βάθος h = 1,25 m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή. Η οροφή της δεξαμενής είναι ανοιχτή στον αέρα. Βρείτε

α) την ταχύτητα εκροής και

β) τον όγκο που εκρέει ανά μονάδα χρόνου και τον χρόνο που απαιτείται για να γεμίσει δοχείο όγκου 500 ml.

Δίνονται: $A = \pi r^2$ το εμβαδόν κυκλικής διατομής ακτίνας r, g = 10 m/s^2

ΛΥΣΗ

(α) Σύμφωνα με το θεώρημα Toricelli για μεγάλη ανοιχτή δεξαμενή και μικρό άνοιγμα, η ταχύτητα εκροής είναι:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

(β) Ο όγκος που εκρέει ανά μονάδα χρόνου (δηλ. η Παροχή Q) θα είναι:

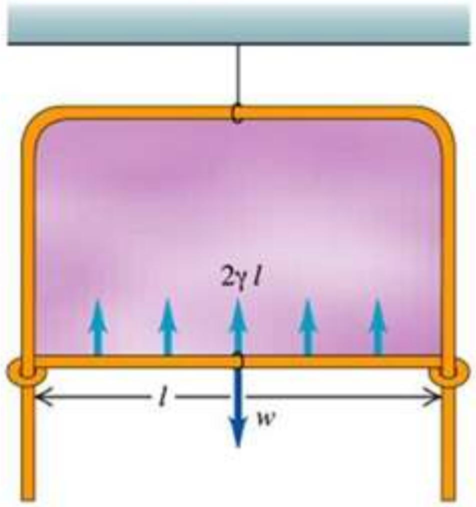
$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_2\upsilon_2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 A_2\upsilon_2 = 3{,}14 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ m}^3/\text{s} = 1{,}57 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Για να γεμίσει δοχείο όγκου 500 ml = 0,5 L = 0,5 · 10^{-3} m^3 πρέπει να εκρεύσει από την τρύπα ίσος όγκος, δηλ. ΔV = 0,5 · 10^{-3} m^3

Από την ανωτέρω εξίσωση έχουμε ότι $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ =1,57 · 10^{-3} m^3/s $\Rightarrow$ Δt = 0,5 · 10^{-3} m^3 / 1,57 · 10^{-3} m^3/s $\Rightarrow$ $\Delta t \approx$ 0,32 s

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΤΑΣΗ

Η τάση του υγρού να μειώσει την επιφάνειά του ώστε να μειώσει την ενέργειά του έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση, μακροσκοπικά, δυνάμεων συστολής της επιφάνειας του στις οποίες οφείλεται το φαινόμενο που ονομάζουμε επιφανειακή τάση.



Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης γ ορίζεται ως η δύναμη *F* που ασκείται από την επιφάνεια στη μονάδα μήκους:

$$\gamma = F / 2\ell$$

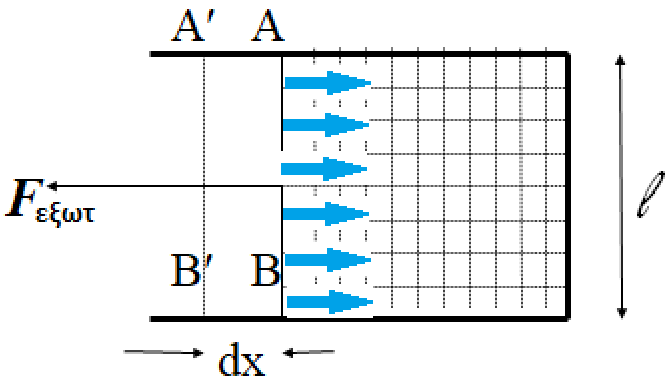
ΜΟΝΑΔΕΣ: N/m 1 dyn/cm = 10^{-3} N/m (*)

* Ο παράγοντας 2 εμφανίζεται στον παρανομαστή διότι η μεμβράνη αποτελείται από δύο επιφάνειες σε επαφή με το κινούμενο τμήμα. Παρά του ότι η μεμβράνη είναι πολύ λεπτή το πάχος της είναι τεράστιο συγκρινόμενο με τις διαστάσεις ενός μορίου. Το στρώμα της επιφάνειας που προκαλεί την επιφανειακή τάση έχει πάχος λίγων μόλις μορίων.

Εναλλακτικός ορισμός

το *γ* ορίζεται εναλλακτικά ως η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια της συνολικής επιφάνειας στη μονάδα επιφάνειας.

$$\gamma = \frac{\Delta U}{\Delta A}$$



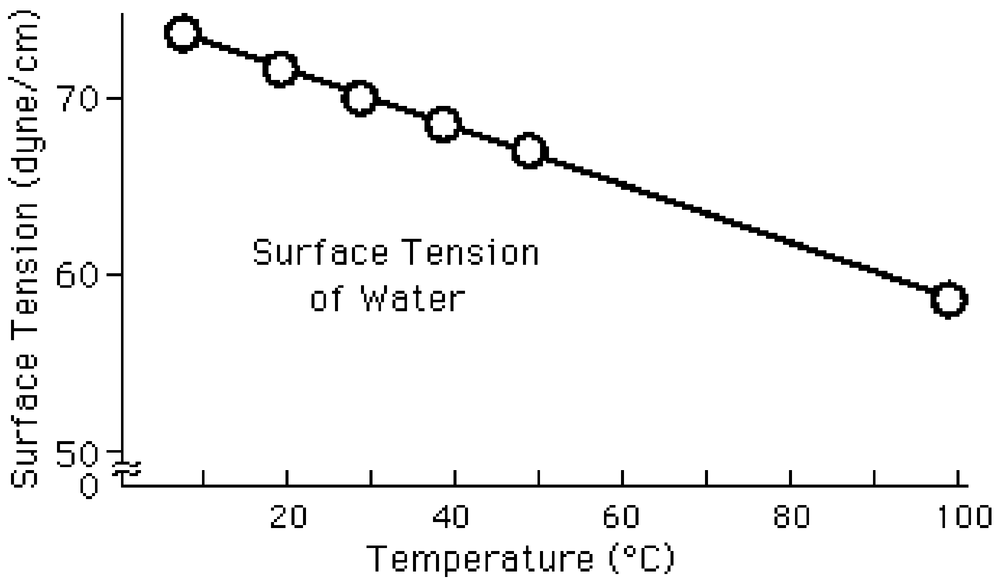
ΜΟΝΑΔΕΣ: 1 J/m^2 ισοδύναμο του N/m

όπως 1 erg/cm^2 ισοδύναμο του dyn/cm (=10^{-3} N/m)

- Επειδή ο συντελεστής γ εξαρτάται από το είδος των ελκτικών δυνάμεων μεταξύ των μορίων, θα πρέπει να ***εξαρτάται από το υγρό***.
- Όταν εξ' άλλου ***αυξάνεται η θερμοκρασία***, αυξάνεται η θερμική κίνηση και η μέση μεταξύ των μορίων απόσταση και επομένως μικραίνει το μέτρο των μεταξύ τους ελκτικών δυνάμεων. Άρα μικραίνει και η επιφανειακή ενέργεια, με τελικό αποτέλεσμα τη ***μείωση της τιμής της επιφανειακής τάσεως γ***.

Πειραματικές τιμές του συντελεστή γ για ορισμένα υγρά

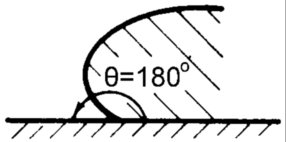
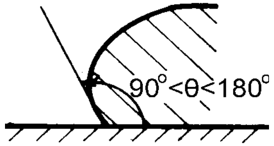
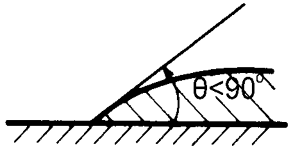
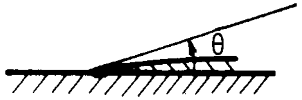
υγρό	**θερμοκρασία °C**	**γ dyn/cm=10^{-3}N/m**
αιθανόλη	20	22.3
σαπωνοδιάλυμα	20	25.0
CCl_4	20	26.8
βενζόλιο	20	28.9
λάδι	20	32.0
γλυκερίνη	20	63.1
υδράργυρος	20	465.0
υγρό ήλιο	-269	0.12
υγρό οξυγόνο	-193	15.7
Νερό	0	75
	20	72
	60	66
	100	58
	375	0.0



ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΕΠΑΦΗΣ ΥΓΡΟΥ - ΣΤΕΡΕΟΥ

Σταγόνα υγρού τοποθετείται επάνω στην επιφάνεια στερεού

Μικρή γωνία συνεπαφής θ $\Rightarrow$ μεγάλη ενέργεια συνάφειας

	θ (°)	*συνθ*		*ΣΧΟΛΙΑ*
	180	-1		Η ενέργεια συνάφειας είναι μηδέν και επομένως **το στερεό δεν διαβρέχεται**. Ενδεικτικές περιπτώσεις: νερό σε υδρόφοβες επιφάνειες, υδράργυρος επάνω σε γυαλί, κα.
	90 < θ < 180	< 0		**Η διαβροχή είναι κακή.** Οι δυνάμεις συνάφειας είναι μικρότερες από τις δυνάμεις συνοχής του υγρού.
Οριακή περίπτωση	90	0		Οι δυνάμεις συνάφειας εξισορροπούνται από τις δυνάμεις συνοχής του υγρού.
	< 90	> 0		**Καλή διαβροχή του στερεού από το υγρό**. Οι δυνάμεις συνάφειας είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις συνοχής του υγρού.
	0	1		Η ενέργεια συνάφειας ισούται με την ενέργεια συνοχής του υγρού και **η διαβροχή είναι τέλεια**.

***ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ**:* Καλή διαβροχή όταν $\downarrow \gamma_{\upsilon}$ (ζεστό νερό, απορρυπαντικό)

Νόμος του Laplace

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Επίπεδη επιφάνεια: $r_1 \to \infty$ και $r_2 \to \infty \Rightarrow \Delta p = 0$

Σφαίρα: $r_1 = r_2 = r\ (>0) \Rightarrow \Delta p = 2\gamma / r\ (>0)$

Φυσαλίδα: $r_1 = r_2 = r\ (>0) \Rightarrow \Delta p = 4\gamma / r\ (>0)$

Ερωτήσεις

(i) Πόσο πιο μεγάλη είναι η πίεση (σε pascal) του αέρα που είναι εγκλωβισμένος σε μια σαπουνόφουσκα με διάμετρο 6 cm, από τον ατμοσφαιρικό αέρα. Ο συντελεστής επιφανειακής τάσης του συγκεκριμένου σαπωνοδιαλύματος είναι 25 dyn/cm.

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{r} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-2}} \frac{N/m}{m} = 3{,}33\,Pa$$

(ii) Τι θα συμβεί όταν μια σταγόνα νερού με ακτίνα 1mm περάσει μέσα από ομίχλη που αποτελείται από σταγονίδια ακτίνας 0,01mm; (Υποθέστε ότι T = 20 °C και επομένως η επιφανειακή τάση για το νερό είναι 72,8 dyn/cm)

$$\Delta p_1 = \frac{2\gamma}{r_1} = \frac{2 \cdot 72{,}8 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} \frac{N/m}{m}$$

$$\Delta p_2 = \frac{2\gamma}{r_2} = \frac{2 \cdot 72{,}8 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}} \frac{N/m}{m}$$

$$\Delta p_2 = 100 \Delta p_1$$

Η υπερπίεση στο εσωτερικό των σταγονιδίων (Δp_2) είναι 100 φορές μεγαλύτερη από αυτήν της μεγάλης σταγόνας. Επομένως, η μεγάλη σταγόνα θα απορροφήσει στο πέρασμά της όλα τα σταγονίδια και θα μεγαλώσει ακόμη περισσότερο.

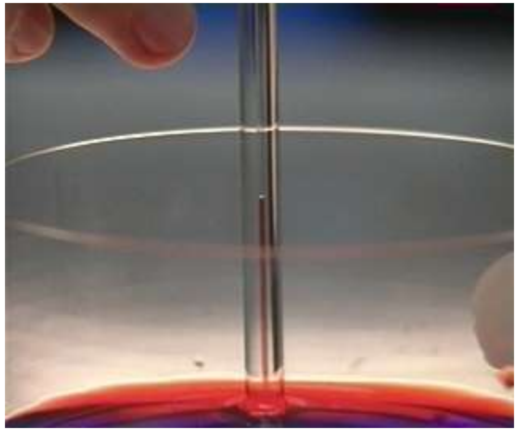
(iii) Εάν η διαφορά μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής της πίεσης μιας σταγόνας νερού είναι 0,02 atm τότε η διάμετρος της σταγόνας είναι περίπου: (Υποθέστε ότι T = 20 °C και επομένως η επιφανειακή τάση για το νερό είναι 72,8 dyn/cm. Δίνεται 1atm ≈ 10^5 Pa).

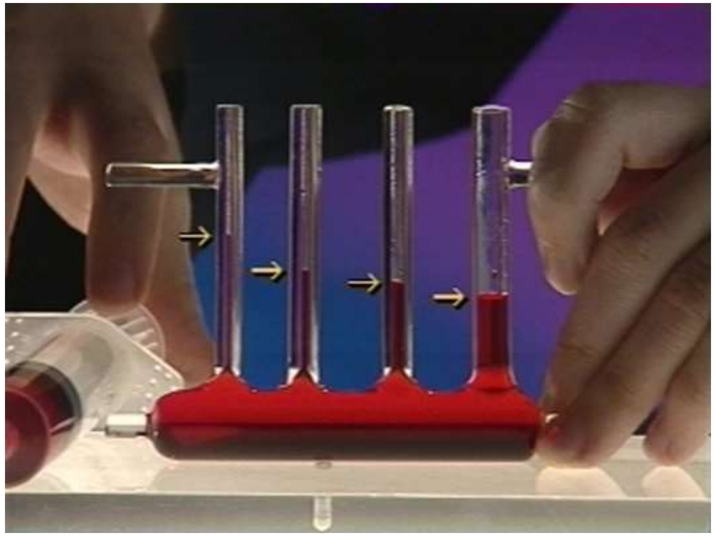
Α. 0,146 m
Β. 0,146 cm
Γ. 0,146 mm
Δ. 0,146 μm

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} \Leftrightarrow d = \frac{4\gamma}{\Delta p} = \frac{4 \cdot 72{,}8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{3}} \frac{N/m}{Pa} = 145{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{N/m}{N/m^2} \approx 0{,}146\,mm$$

ΤΡΙΧΟΕΙΔΕΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

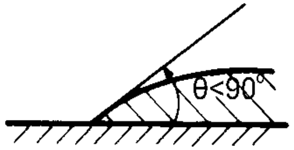
Αν ο σωλήνας είναι στενός (η εσωτερική διάμετρός του είναι της τάξης των mm και μικρότερη, αντιστοιχεί σε **τάξη μεγέθους του πάχους τρίχας και για αυτό ονομάζεται τριχοειδής σωλήνας**), η επιφάνεια του νερού στο εσωτερικό του είναι σημαντικά καμπυλωμένη και η στάθμη του νερού στο εσωτερικό του σωλήνα ανυψώνεται. Παρατηρούμε μάλιστα ότι όσο μικρότερη είναι η εσωτερική διάμετρός του σωλήνα τόσο μεγαλύτερη είναι η ανύψωση της στάθμης του νερού στο εσωτερικό του.





ΤΡΙΧΟΕΙΔΕΣ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ - ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΔΙΑΒΡΟΧΗ

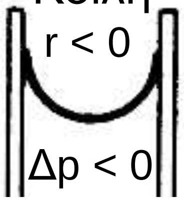


Καλή

$0^\circ < \theta < 90^\circ$

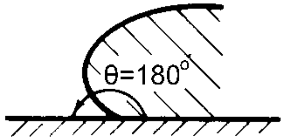
συνθ > 0

Κοίλη



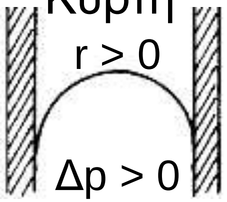
Κακή

$90^\circ < \theta < 180^\circ$



συνθ < 0

Κυρτή



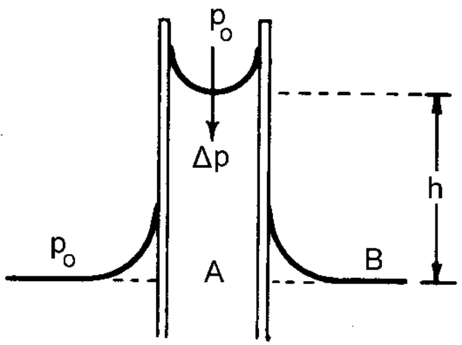
Καμπύλωση επιφάνειας

$$\Delta p = 2\gamma / r$$

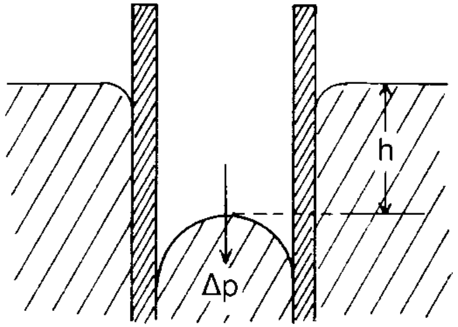
R = r συνθ

$$\boxed{\rho g h = \frac{2\gamma}{R} \sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$h = 2\gamma\sigma\upsilon\nu\theta / \rho g R$$



h > 0



h < 0

ΕΡΩΤΗΣΗ Πολ. Επιλ.

Το υλικό τεφλόν δεν διαβρέχεται καθόλου από το νερό. Η γωνία συνεπαφής του νερού σε τεφλόν είναι:

(α) 0°, (β) 90°, (γ) 180°, (δ) 270°.

ΑΣΚΗΣΗ

Μια μακρά, λεπτή, γυάλινη, τριχοειδής πιπέτα, εσωτερικής διαμέτρου 0,1 mm, εμβαπτίζεται σε αποσταγμένο νερό θερμοκρασίας 25°C. Δεδομένου ότι για το νερό σε αυτήν τη θερμοκρασία γ = 72 dyn/cm, πόσο ψηλά θα ανέλθει η στάθμη του νερού στο εσωτερικό της πιπέτας; (το γυαλί είναι εξαιρετικά καθαρό και η γωνία συνεπαφής του με νερό ίση με 0°, g = 10 m/s^2 και $\rho_{\nu\varepsilon\rho}$ = 1 g/cm^3).

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{aligned}
&\rho g h = \frac{2\gamma}{R}\,\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow h = \frac{2\gamma}{Rg\rho}\,\sigma\upsilon\nu\theta \\
&R = \frac{d}{2} = \frac{10^{-1}\cdot 10^{-3}}{2}\,\mathrm{m} = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
&\gamma = 72\,\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}} = 72\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/m} \\
&\rho = \rho_{\nu\varepsilon\rho} = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\
&\theta = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 1
\end{aligned}\right\}
\quad h = \frac{2\cdot 72\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-5}\cdot 10\cdot 10^{3}}\cdot 1 = 28{,}8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} =$$

$$= 28{,}8\ \mathrm{cm}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Που θα βρεθεί η στάθμη υδραργύρου μέσα σε τριχοειδή γυάλινο σωλήνα διαμέτρου 0,5 mm; Θεωρείστε ότι ο υδράργυρος δεν διαβρέχει τα τοιχώματα του γυάλινου σωλήνα (γωνία επαφής θ = 180°), ρ_{Hg} = 13,6 · 10^3 kg/m^3 και ο συντελεστής επιφανειακής του τάσης είναι 465 dyn/cm στους 20 °C (g = 10 m/s^2 , 1 dyn = 1 g·cm/s^2).

ΛΥΣΗ

$$1\mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\frac{m}{\mathrm{s}^2} = 10^3\mathrm{g}\frac{10^2\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 10^5\ \mathrm{dyn}$$ επομένως $$1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 1\frac{10^5\mathrm{dyn}}{10^2\mathrm{cm}} = 10^3\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}}$$

ή $$1\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}} = 10^{-3}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\rho g h = \frac{2\gamma}{R}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow h = \frac{2\gamma}{Rg\rho}\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\gamma = 465\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}} = 465\cdot 10^{-3}\mathrm{N/m}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{0,5\cdot 10^{-3}}{2}\mathrm{m} = 2,5\cdot 10^{-4}\mathrm{m}$$

$$\rho = \rho_{\mathrm{Hg}} = 13,6\cdot 10^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\theta = 180° \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$$

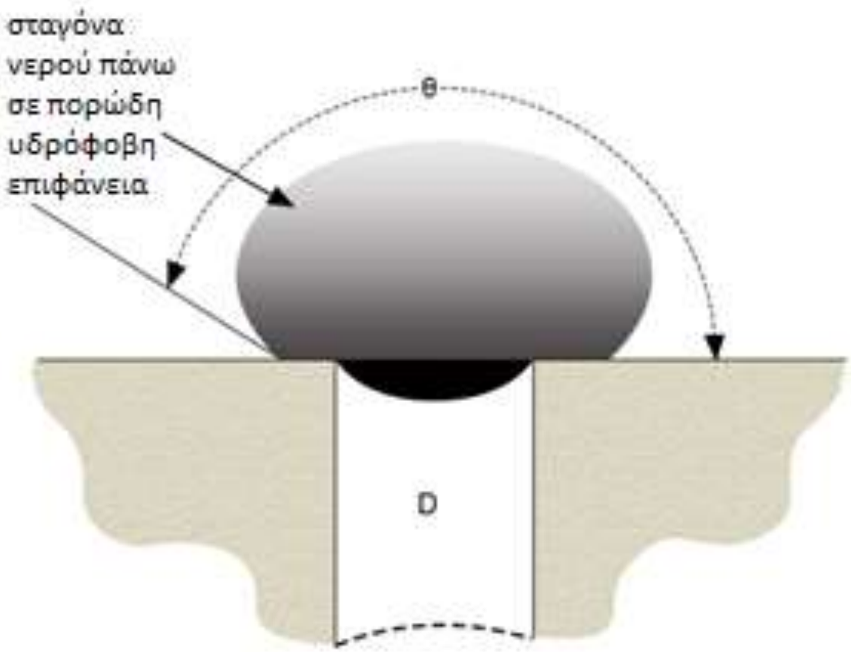
$$h = \frac{2\cdot 465\cdot 10^{-3}}{2,5\cdot 10^{-4}\cdot 10\cdot 13,6\cdot 10^3}\cdot(-1) =$$

$$= -\,27,35\cdot 10^{-3}\mathrm{m} = -\,27,35\ \mathrm{mm}$$

Δηλ., η στάθμη του υδραργύρου θα ταπεινωθεί κατά 27,35 mm

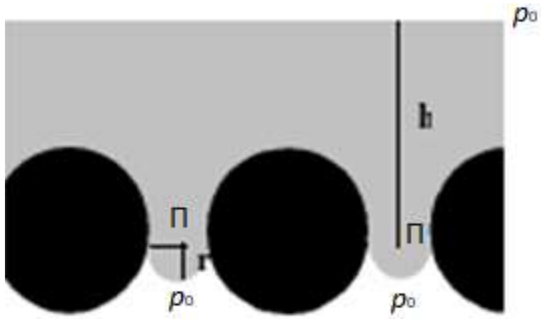
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ *τριχοειδούς φαινομένου*

Μία πορώδης επιφάνεια (με πόρους μικρής διαμέτρου), από υλικό που δεν διαβρέχεται από το νερό, δεν επιτρέπει σ' αυτό να τη διαπεράσει (Παράδειγμα: εξήγηση γιατί τα δέρματα είναι αδιάβροχα.)



ΑΣΚΗΣΗ

Πόση πρέπει να είναι η μέγιστη διάμετρος των πόρων μιας πορώδους επιφάνειας (π.χ. μιας τέντας) ώστε να συγκρατεί νερό ύψους h = 10 cm; (g = 10 m/s^2 και θεωρείστε για το νερό γ = 0,07 N/m, ρ = 1 g/cm^3)



ΛΥΣΗ (Α' ΤΡΟΠΟΣ)

Όταν η πορώδης επιφάνεια οριακά υποστηρίζει το νερό που βρίσκεται πάνω της, στο διάκενο των πόρων η επιφάνεια του νερού θα είναι ημισφαιρική, με ακτίνα $r = d/2$ (όπου d: η διάμετρος των πόρων.

Σε αυτό το στιγμιότυπο το νερό (παριστάνεται με γκρι στο σχήμα) συγκρατείται οριακά ανάμεσα στους πόρους και η γωνία συνεπαφής του με το υλικό της τέντας (παριστάνεται με μαύρο στο σχήμα) είναι $\theta = 180^\circ \Rightarrow$ συνθ = -1 (εξαιτίας της κακής διαβροχής νερού-πορώδους επιφάνειας). Επομένως, η μεταβολή της πίεσης στο εσωτερικό του νερού εξαιτίας της ημισφαιρικής επιφάνειας του στους πόρους θα είναι ίση με: $\frac{2\gamma}{r}\text{συν}\theta = -\frac{2\gamma}{r}$

Αφού το νερό συγκρατείται, η ολική πίεση $p_{i.}$ στο εσωτερικό του νερού στην περιοχή Π (βλ. σχήμα), θα είναι ίση με την εξωτερική πίεση $p_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = p_o$. Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} p_i = p_{\varepsilon\xi\omega\tau} = p_0 \\ p_i = p_0 + \rho g h - \dfrac{2\gamma}{r} \end{array}\right\} \rho g h = \frac{2\gamma}{r} \Rightarrow r = \frac{2\gamma}{\rho g h} = \frac{2\cdot 7\cdot 10^{-2}}{10^3\cdot 10\cdot 10\cdot 10^{-2}}\,\mathrm{m} = 14\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} =$$
$$= 0{,}14\ \mathrm{mm}$$

Άρα η μέγιστη διάμετρος θα είναι: $d = 2r =$ **0,28 mm**

¨Πραγματικά Ρευστά¨ - Ιξώδες, Στροβιλισμός

Τα πραγματικά ρευστά είναι ιξώδη.

➢ **Μακροσκοπικά**:

- Ιξώδες είναι η εσωτερική τριβή σε ένα ρευστό. Οι δυνάμεις τριβής αντιτίθενται στην κίνηση ενός τμήματος του ρευστού ως προς ένα άλλο τμήμα του.
- Μπορούμε να θεωρήσουμε το ιξώδες ως μέτρο της αντίστασης ενός υγρού στη ροή του.

➢ **Μικροσκοπικά**:

- Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων τους προκαλεί, κατά την κίνησή τους, την εμφάνιση ελκτικών διατμητικών δυνάμεων μεταξύ των κινουμένων τμημάτων τους, τα οποία δεν μπορεί πλέον να θεωρηθεί ότι κινούνται ανεξάρτητα. Η επενέργεια των διαμοριακών δυνάμεων προκαλεί μεταφορά ενέργειας από το ένα τμήμα του ρευστού στο άλλο, με αποτέλεσμα οι ταχύτητες των τμημάτων αυτών να τείνουν να εξισωθούν έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη δυνάμεων τριβής ή αντίστασης σε κάθε σχετική κίνηση των μορίων. Το έργο αυτών των δυνάμεων αντίστασης είναι οι απώλειες της μηχανικής ενέργειας του ρευστού που εκδηλώνονται με την ελαφρά θέρμανσή του.

Όταν αυξάνεται η θερμοκρασία αυξάνουν και οι μέσες αποστάσεις μεταξύ των μορίων, επομένως μικραίνουν τα μέτρα των διαμοριακών δυνάμεων, και γι’ αυτό μικραίνει και το μέτρο της μακροσκοπικής ελκτικής δυνάμεως F.
Επομένως *όταν* ***αυξάνει η θερμοκρασία ελαττώνεται το ιξώδες***.

Αυτό ισχύει στην περίπτωση των ***υγρών*** αλλά όχι και των ***αερίων***, στα οποία οι διαμοριακές δυνάμεις είναι από πολύ μικρές μέχρι αμελητέες σε σύγκριση με τις αντίστοιχες των υγρών. Το ιξώδες των αερίων οφείλεται σε συγκρούσεις μεταξύ των μορίων κατά την κίνησή τους. Η πιθανότητα να συμβεί μια σύγκρουση αυξάνεται με τη θερμοκρασία με αποτέλεσμα ***το ιξώδες να αυξάνει όταν αυξάνει η θερμοκρασία.***

ΥΓΡΑ: $\uparrow T \Rightarrow \uparrow$ διαμοριακές αποστάσεις & $\downarrow$ ελκτικές διαμοριακές δυνάμεις

$\Rightarrow \downarrow F \quad \Rightarrow \downarrow \eta$

ΑΕΡΙΑ: διαμοριακές δυνάμεις πολύ μικρές

$\uparrow T \quad \Rightarrow \Rightarrow$ αύξηση ποσοστού συγκρούσεων $\quad \Rightarrow \uparrow \eta$

Αν εξετασθεί το φαινόμενο ***από ενεργειακή άποψη, θα διαπιστωθεί ότι το ιξώδες προκαλεί μετατροπή μέρους της μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα***.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΙΞΩΔΟΥΣ:

Στο S.I. είναι το Pa·s = 1 N·s/m^2 ή 1 kg/(m·s)

(Στη Γαλλία χρησιμοποιείται το *poiseuille* (Pl) ως Pa·s όχι όμως διεθνώς. Δεν πρέπει να συγχέουμε το poiseuille με το poise που αναφέρεται στο όνομα του ίδιου προσώπου!)

Συνήθως χρησιμοποιείται το ***poise* (P)** που πήρε το όνομα του από τον Jean Louis Marie Poiseuille.

Μεταξύ των δύο μονάδων υπάρχει η σχέση **1 Pa·s (**=1 Pl) = **10 P**

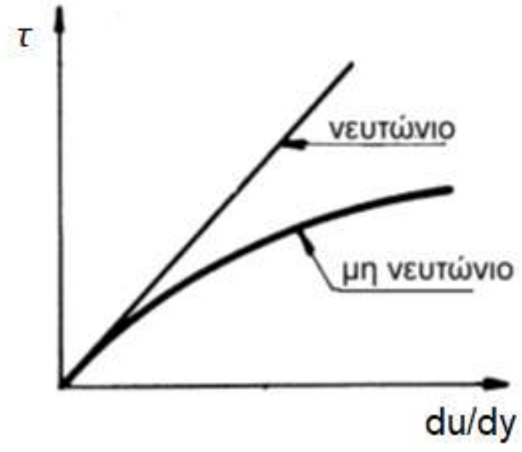
Η μοναδα P είναι κατάλληλη για τη μέτρηση του ιξώδους μόνο παχύρευστων υγρών, όπως η γλυκερίνη ή τα ορυκτέλαια.

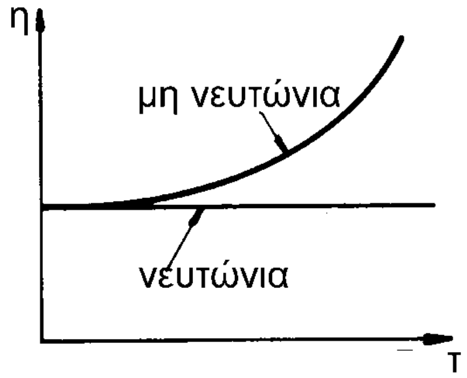
Για τη μέτρηση των λεπτόρευστων χρησιμοποιείται συνήθως το ***centipoise* (cP)** (ιξώδες νερού = 1,0020 cP στους 20 °C).

1 poise = 100 centipoise = 1 g/(cm·s) = 0.1 Pa·s.
1 centipoise = 1 mPa·s.

ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ – ΜΗ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΡΕΥΣΤΑ

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{\Delta u}{\Delta y}$$





Η συνάρτηση η=f(τ) για νευτώνεια και μη νευτώνεια υγρά

Η γραμμική σχέση του Νεύτωνα ισχύει για μεγάλο αριθμό ρευστών, τα οποία ονομάζονται ***νευτώνεια*** και που είναι τα ***αέρια*** και τα ***λεπτόρευστα υγρά***.

Εκτός όμως από αυτά υπάρχει και μια μεγάλη κατηγορία ρευστών για τα οποία η σχέση αυτή αποτελεί απλώς μια προσέγγιση. Τέτοια είναι τα ***παχύρευστα υγρά και τα διαλύματα μακρομορίων***. Σ' αυτά η σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και βαθμίδας ταχύτητας δεν είναι γραμμική, αλλά πολυπλοκότερη. Τα ρευστά αυτά ονομάζονται ***μη νευτώνεια***.

Παραδείγματα μη-Νευτώνειων ρευστών

Κέτσαπ:

(ιξώδες μειώνεται με αυξανόμενη τάση)

Γιαούρτι

(ιξώδες μειώνεται με τον χρόνο εφαρμογής τάσης)

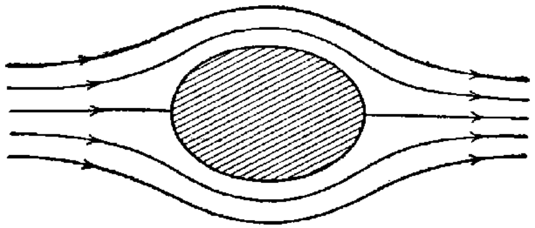
Γύψος

(ιξώδες αυξάνεται με τον χρόνο εφαρμογής τάσης)

Η αντίσταση κατά την κίνηση στερεού μέσα σε ρευστό

Όταν στερεό κινείται σε σχέση με πραγματικό ρευστό, ασκείται επάνω του δύναμη, που αντιτίθεται στην κίνησή του και η οποία ονομάζεται **αντίσταση**. Η αντίσταση εξαρτάται από το ρευστό και τη σχετική ταχύτητα ρευστού-στερεού, είναι δε η συνισταμένη των δυνάμεων τις οποίες δέχονται τα στοιχειώδη τμήματα της επιφάνειας του στερεού, λόγω των δυνάμεων συνάφειας ρευστού-στερεού. Η τιμή της αντιστάσεως προσδιορίζεται από διαφορετικούς νόμους, ανάλογα με την τιμή της σχετικής ταχύτητας.
Για μικρές ταχύτητες, η **αντίσταση** αυτή είναι ανάλογη του συντελεστή ιξώδους *η*, της σχετικής ταχύτητας *υ* και μιας γραμμικής διαστάσεως του στερεού *d*:

$$F = k\eta \upsilon d$$



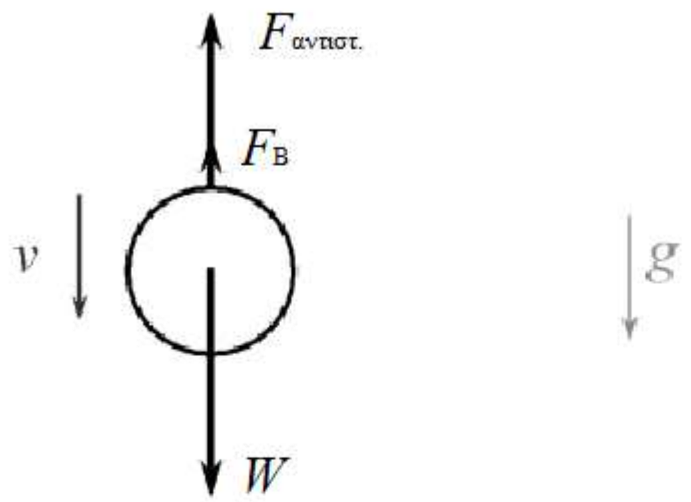
Όταν το στερεό είναι σφαίρα η σχέση αυτή γίνεται:

$$F = 6\pi\eta R\upsilon$$

όπου *R* η ακτίνα της σφαίρας.

Η σχέση αυτή ονομάζεται **νόμος του Stokes**

Πτώση σφαίρας σε ρευστό



Έστω ότι σφαίρα ακτίνας R, μάζας m και πυκνότητας $ρ_σ$ αφήνεται να πέσει σε ρευστό πυκνότητας $ρ_ρ$ και ιξώδους $η$. Κατά την πτώση ασκούνται επάνω της το βάρος της W, η άνωση F_B εκ μέρους του ρευστού και η αντίσταση $F_{αντιστ.}$, λόγω της κινήσεώς της μέσα σ’ αυτό. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών προσδίδει στη σφαίρα επιτάχυνση $α$ που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$ΣF = m \cdot α \Rightarrow W - F_B - F_{αντιστ.} = m \cdot α$$ με

$$F_B = Vρ_ρ g = \frac{4}{3}\pi R^3 ρ_ρ g$$

όπου V ο όγκος της σφαίρας και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η αντίσταση του ρευστού, σύμφωνα με το νόμο του Stokes, είναι: $F_{αντιστ.} = 6πηRυ$

Από τη σχέση αυτή διαπιστώνεται ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα $υ$ της σφαίρας μικραίνει <u>η επιτάχυνση της $α$, η οποία κάποια στιγμή θα μηδενισθεί</u>.

Τότε $$ΣF = 0 \Rightarrow W - F_B - F_{αντιστ.} = 0$$

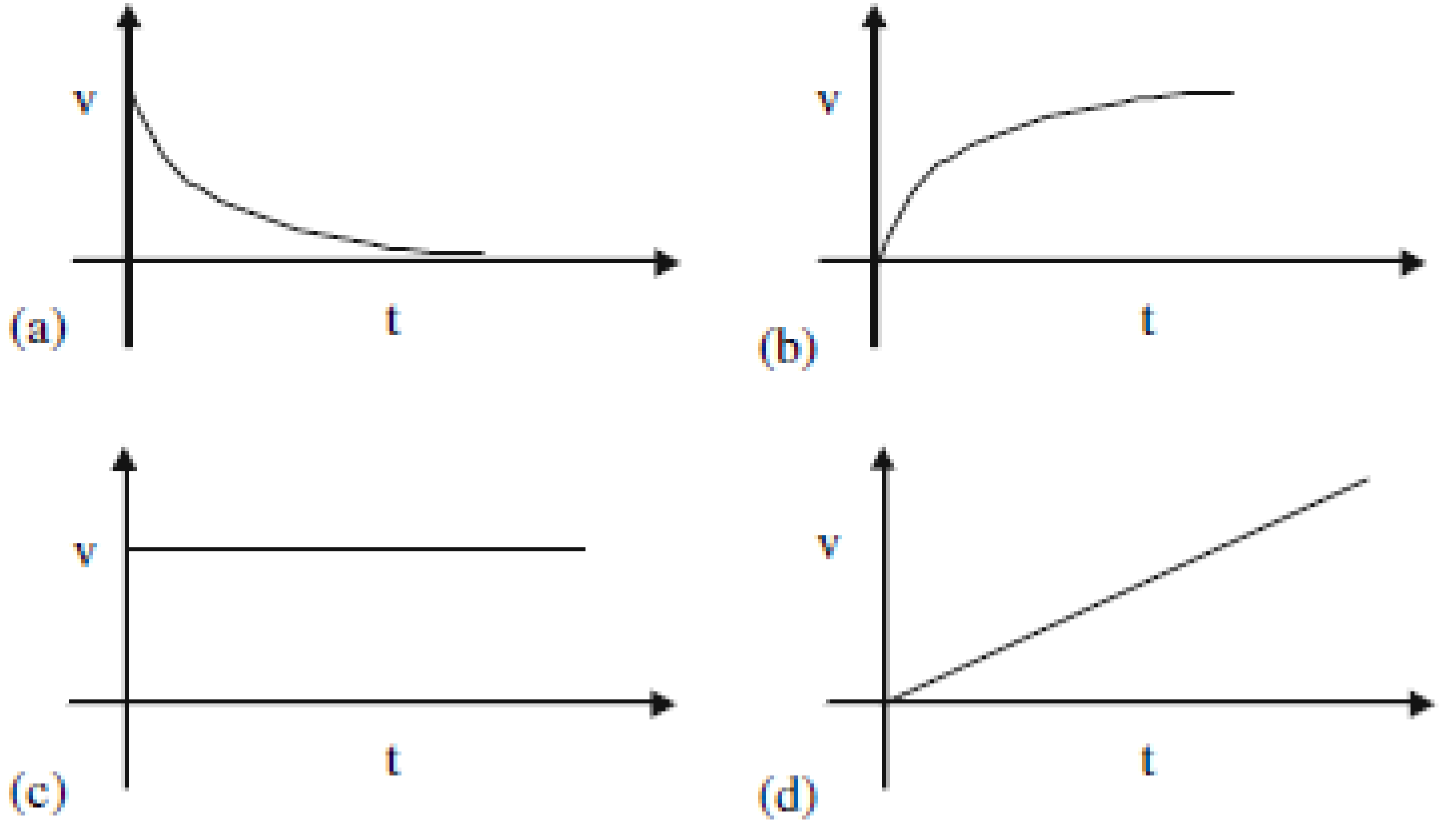
και η ταχύτητα, που θα είναι η μέγιστη δυνατή, ονομάζεται **ορική ταχύτητα** και από την προηγούμενη σχέση υπολογίζεται:

$$Vρ_σ g - Vρ_ρ g - 6πηRυ_{ορικη} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 ρ_σ g - \frac{4}{3}\pi R^3 ρ_ρ g - 6πηRυ_{ορικη} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ_{\text{ορικη}} = \frac{2R^2(ρ_σ - ρ_ρ)g}{9η}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ Πολ. Επιλ.

Ένα σώμα αφήνεται από ηρεμία σε t = 0 να πέσει μέσα σε ιξώδες ρευστό. Ποιο από τα διαγράμματα περιγράφει καλύτερα την ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο;



ΑΣΚΗΣΗ

Μια χάλκινη σφαίρα με μάζα 0,2 g πέφτει με οριακή ταχύτητα 5,0 cm/s μέσα σε άγνωστο ρευστό. Αν η πυκνότητα του χαλκού είναι 8900 kg/m^3 και του ρευστού 2800 kg/m^3, πόσος είναι ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού (σε poise);

1 poise = 1 dyn·s/cm^2 (1 dyn = 1 g·cm/s^2)

$m_{σφαιρ.} = 0{,}2\text{g} = 0{,}2 \times 10^{-3}$ kg

$υ_{ορ.} = 5\text{cm/s} = 5\times 10^{-2}$ m/s

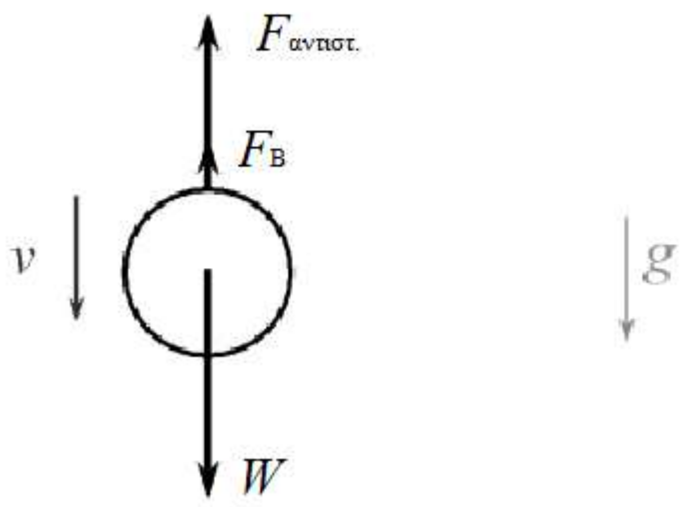
$ρ_{χαλκ.} = 8900$ kg/m^3 $= 8{,}9 \times 10^3$ kg/m^3

$ρ_{ρευστ.} = 2{,}8 \times 10^3$ kg/m^3

$υ_{ορική}$ όταν: $\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{W} + \vec{F_B} + \overrightarrow{F_{αντ.}} = \vec{0}$ *Σε αλγεβρική μορφή:* $F_{αντ.} + F_B - W = 0$ (1)

$$V_{σφ.} = \frac{m_{σφ.}}{ρ_{χαλκ.}} = \frac{0,2\times10^{-3}kg}{8,9\times10^{3}\,kg/m^3} \simeq 2,25\times10^{-8}m^3$$

$$V_{σφ.} = \frac{4}{3}\pi r_{σφ.}^3 \Rightarrow r_{σφ.} = \sqrt[3]{\frac{3V_{σφ.}}{4\pi}m^3} = \sqrt[3]{5,37\times10^{-9}m^3} \simeq 1,75\times10^{-3}m$$



Από (1):

$$6\pi\eta r_{σφ.}υ_{ορ.} + ρ_{ρευστ.}V_{σφ.}g - m_{σφ.}g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\left(m_{σφ.} - ρ_{ρευστ.}V_{σφ.}\right)g}{6\pi r υ_{ορ.}} = 0,083N\,s/m^2 = 0,83\,poise$$

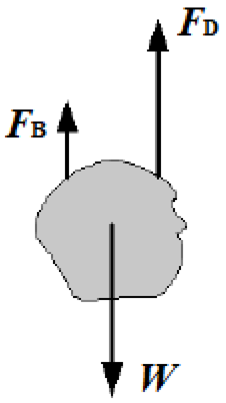
ΑΣΚΗΣΗ

Ένα κομμάτι πάγου (χαλάζι) πέφτει ξεκινώντας από την ηρεμία μέσα στον ατμοσφαιρικό αέρα του οποίου η πυκνότητα δίνεται. Αν η δύναμη της αντίστασης δίνεται ως:

$$F_D = \frac{1}{5} C_D V \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \upsilon^2$$

με μέση τιμή του συντελεστή αντίστασης C_D = 0,45, υπολογίστε την ορική του ταχύτητα. (Δίνονται: g = 10 m/s^2. Οι πυκνότητες ατμοσφαιρικού αέρα $\rho_{\alpha\varepsilon\rho} = 1{,}2\cdot10^{-3}$ g/cm^3 και πάγου $\rho_{\pi\alpha\gamma}$ = 0,92 g/cm^3

ΛΥΣΗ



$\upsilon = \upsilon_{\text{ορική}}$ όταν: $F_D + F_B - W = 0$ (1)

Γνωρίζουμε ότι: $W = mg = \rho_{\pi\alpha\gamma}\cdot V\cdot g$ και $F_B = \rho_{\alpha\varepsilon\rho}\cdot V\cdot g$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\frac{1}{5} C_D V \rho_{\alpha\varepsilon\rho} \upsilon^2{}_{o\rho} + \rho_{\alpha\varepsilon\rho} V g - \rho_{\pi\alpha\gamma} V g = 0 \Longrightarrow$$

$$\upsilon^2{}_{o\rho} = \frac{5\left(\rho_{\pi\alpha\gamma} - \rho_{\alpha\varepsilon\rho}\right)g}{C_D \rho_{\alpha\varepsilon\rho}} = \frac{5(920 - 1{,}2)10}{0{,}45\cdot 1.2} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \Longrightarrow \upsilon_{o\rho} = 291{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Μια χρυσή σφαίρα ακτίνας R αφήνεται από ηρεμία να πέσει στην επιφάνεια καστορέλαιου ιξώδους η, που περιέχεται σε αρκετά μεγάλο δοχείο στους 20°C. Ποια είναι η επιτάχυνση της σφαίρας όταν αυτή έχει i) $\upsilon = \upsilon_{οριική}$, ii) $\upsilon = \upsilon_{οριική}/2$

(Δίνονται: $\rho_{χρυσού} = \rho_\chi = 19{,}3$ g/cm^3, $\rho_{καστορέλαιου} = \rho_\kappa = 0{,}9$ g/cm^3, $V_{σφαιρας} = V = (4/3)\,\pi R^3$)

ΛΥΣΗ

(i) $\alpha = 0$ (από τον ορισμό της οριικής ταχύτητας)

(ii) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα: $\sum F = m\cdot\alpha \Rightarrow F_{αντιστ} + F_B - W = m\cdot\alpha$ (1)

Σύμφωνα με το νόμο του Stokes για πτώση σφαίρας ακτίνας R σε ρευστό ιξώδους η και πυκνότητας ρ: $F_{αντιστ} = 6\pi\eta R\upsilon$, οπότε για την περίπτωση του ερωτήματος:

$$F_{αντιστ} = 6\pi\eta R(\upsilon_{ορ}/2) \quad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι η σφαίρα θα αποκτήσει οριική ταχύτητα όταν $F_{αντιστ,\ ορικ} + F_B - W = 0$ από όπου

προκύπτει (βλέπε στα προηγούμενα) ότι:
$$\upsilon_{ορ} = \frac{2R^2(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{9\eta} \quad (3)$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας, μπορούμε να εκφράσουμε το R^3 από τη σχέση $V = (4/3)\,\pi R^3 \Rightarrow R^3 = (3V)/4\pi$. Οπότε από (2) και (3) έχουμε:

$$F_{αντιστ} = \frac{V(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1):
$$\frac{V(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{2} + \rho_\kappa V g - \rho_\chi V g = \rho_\chi V \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-(\rho_\chi - \rho_\kappa)g}{2\rho_\chi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-(19{,}3 - 0{,}9)\cdot 10}{2\cdot 19{,}3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = -4{,}77\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Βγαίνει αρνητική (αναμενόμενο) γιατί έχει την κατεύθυνση της g