Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #1 (2021-22)

Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

τις διατεταγμένες $n-$άδες πραγματικών αριθμών.

Δύο διατεταγμένες $n-$άδες $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ και $(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$ είναι ίσες αν $x_i = x'_i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.

Εφοδιάζουμε το $\mathbb{R}^n$ με δύο πράξεις, το **άθροισμα** και το **βαθμωτό γινόμενο** ως εξής:

Αν $u = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ και $v = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$u + v := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \text{ και } \lambda u := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Το $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις καλείται **Ευκλείδιος χώρος διάστασης n** και τα στοιχεία του λέγονται **διανύσματα** (ή **ανύσματα**). Συμβολίζουμε το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ με $\overline{0}$ ή απλά με 0 αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχισης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Έστω $v_1, v_2, \ldots v_k$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, όπου k θετικός ακέραιος. Ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι (ή εκφράζεται ως)* **γραμμικός συνδυασμός** *των $v_1, v_2, \ldots v_k$ αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ έτσι ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k$.*

Παράδειγμα: Το διάνυσμα $v = (1, 3, 0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1 = (0, 1, -1)$ και $v_2 = (1, 1, 2)$.

Εξήγηση: Αναζητούμε αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ δηλαδή,

$$(1, 3, 0) = \lambda_1(0, 1, -1) + \lambda_2(1, 1, 2) \Leftrightarrow (1, 3, 0) = (\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Η τελευταία ισότητα διανυσμάτων ισχύει αν και μόνο αν $\left\{\begin{array}{l} 1 = \lambda_2 \\ 3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right\}$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$, δηλαδή, $v = 2v_1 + v_2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 *Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots v_k$ του Ευκλειδίου χώρου $\mathbb{R}^n$, λέγονται* **γραμμικά ανεξάρτητα** *αν για κάθε γραμμικό συνδυασμό $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k = \overline{0}$ συνεπάγεται αναγκαστικά ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots v_k$ θα λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** *αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή, υπάρχει γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k = \overline{0}$ χωρίς να μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές λ_i.*

Ισοδύναμα, τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots v_k$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο v_i από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή,

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \cdots + \lambda_{i+1} v_{i+1} \cdots + \lambda_k v_k.$$

Παραδείγματα

1) Τα διανύσματα $(1,2)$ και $(0,1)$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2) Τα διανύσματα $(1,2,-1), (1,0,1)$ και $(0,1,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\lambda_1(1,2,-1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$-\lambda_1 - \lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow -4\lambda_1 = 0$ και άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

3) Τα διανύσματα $(1,0,1), (0,1,-1)$ και $(2,1,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(2,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Το τελευταίο σύστημα έχει άπειρες λύσεις, φερ´ ειπείν, για $\lambda_3 = -1$ έχουμε $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$ οπότε το διάνυσμα (2,1,1) είναι γραμμικός συνδυασμός των (1,0,1) και (0,1,-1) ως εξής:

$$(2,1,1) = 2(1,0,1) + 1(0,1,-1).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

(α) Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει το πολύ n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

(β) Αν $v_1, v_2, \ldots v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε κάθε άλλο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots v_n$.

Σημείωση: Λόγω του (β) στο Θεώρημα παραπάνω, κάθε $n-$άδα $v_1, v_2, \ldots v_n$ αποτελούμενη από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι αποτελεί **βάση** του $\mathbb{R}^n$. Προφανώς ο χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει άπειρες βάσεις.

Παράδειγμα: Τα διανύσματα $(1,0,0),(0,1,0)$ και $(0,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$: αν $u=(u_1,u_2,u_3)$ τυχαίο διάνυσμα τότε

$$\begin{aligned} u = (u_1,u_2,u_3) &= (u_1,0,0)+(0,u_2,0)+(0,0,u_3) \\ &= u_1(1,0,0)+u_2(0,1,0)+u_3(0,0,1) \end{aligned}$$

Κανονική Βάση του $\mathbb{R}^n$ **:** Τα διανύσματα

$$e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,1)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα και (άρα) αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ που λέγεται **κανονική βάση.**

Ασκήσεις

1. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα

   (α) $(1,3),(1,-3)\in\mathbb{R}^2$ [Απ: Ναι.]

   (β) $(-1,3),(1,-3)\in\mathbb{R}^2$ [Απ: Όχι.]

   (γ) $(-1,3),(1,-3),(-4,1),(2,2)\in\mathbb{R}^2$ [Απ: Όχι.]

   (δ) $(1,3,0),(1,3,-1),(0,3,1)\in\mathbb{R}^3$ [Απ: Ναι.]

   (ε) $(1,3,0),(1,3,-1),(1,3,1)\in\mathbb{R}^3$ [Απ: Όχι.]

2. Να δείξετε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $v,u\in\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν τα v,u είναι συγγραμικά, δηλαδή $v=\lambda u$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   Ισχύει το ίδιο στο $\mathbb{R}^n, n>2$? [Απ: Ναι]

3. Εξετάστε αν τα διανύσματα $u=(1,-1,2), v=(1,0,-3), w=(0,2,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα η εξαρτημένα. Αν είναι ανεξάρτητα, εκφράστε το διάνυσμα $(2,1,-1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των v,u,w.
   [Απ: $\frac{9}{11}u+\frac{13}{11}v+\frac{10}{11}w=(2,1,-1)$]

4. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των συντεταγμένων x,y,z του διανύσματος $\vec{b}=(x,y,z)$ ώστε αυτό να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v=(1,0,-1)$ και $u=(0,1,2)$.
   [Απ: $x-2y+z=0$]

5. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των συντεταγμένων x, y, z του διανύσματος $\vec{c} = (x, y, z)$ ώστε αυτό να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v = (1, -1, 2)$ και $u = (3, -1, 1)$.

   [Απ: $x + 5y + 2z = 0$]

6. Είναι το σύνολο διανυσμάτων $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$?

   [Απ: Ναι.]

7. Συμπληρώστε τα διανύσματα $v = (1, 0, -1)$ και $u = (0, 1, 2)$ σε μία βάση του $\mathbb{R}^3$.

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4: φερ΄ ειπείν, το διάνυσμα $(1, 1, 0)$ δεν ικανοποιεί την σχέση $x - 2y + z = 0$.

8. Έστω $v_1, v_2, \ldots v_n$ μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ εκφράζεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots v_n$, δηλαδή, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

   Υπόδειξη: Δείξτε ότι αν $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda'_1 v_1 + \cdots + \lambda'_n v_n$, τότε αναγκαστικά $\lambda_1 = \lambda'_1, \ldots, \lambda_n = \lambda'_n$