**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

Αν Χ και Υ είναι σύνολα, τότε **συνάρτηση** λέμε μία σχέση όπου σε κάθε αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο που το συμβολίζουμε .

Λεμε δε οτι η  οριζεται στο συνολο  και παιρνει τιμες μεσα στο συνολο .

α) Το *Χ* λέγεται **πεδίο ορισμού** της  και συχνα συμβολιζεται και με .

β) Το σύνολο  λέγεται **πεδιο τιμων ή συνολο τιμων ή εικόνα της συνάρτησης** .

Δύο συναρτήσεις ,  με κοινο πεδιο ορισμου Χ, λέγονται **ίσες** αν  για καθε Χ.

Η συνάρτηση  λέγεται 1-1 (**ένα προς ένα**) όταν έχει την ιδιότητα:

Αν  τότε .

Η συνάρτηση  λέγεται λεγεται **επι** αν για καθε  υπαρχει 

τετοιο ωστε 

Εστω  και  δυο συναρτησεις ωστε η  ειναι επι. Τοτε οριζεται η συναρτηση  η οποια λεγεται **συνθεση** των .

**Παραδειγμα**

Εστω  συναρτησεις με  τοτε .

Μια συνάρτηση  λέγεται **πραγματική** αν και .

Στη συνέχεια όταν θα λέμε συνάρτηση θα εννοούμε πραγματική συνάρτηση.

**Προταση**

 Αν η συνάρτηση  είναι 1-1 τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση  με την ιδιότητα  για κάθε . Η  λέγεται **αντίστροφη** της  και συμβολίζεται με .

**Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης  λέμε το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου  όπου .

Μια συνάρτηση λέγεται:

**γνησίως αύξουσα** αν όταν .

**αύξουσα** αν όταν .

**γνησίως φθίνουσα** αν όταν .

**φθίνουσα** αν  όταν .

Μία συνάρτηση  λέμε ότι έχει **τοπικά μέγιστο** στο  αν υπάρχει  με ώστε  για κάθε .

Μία συνάρτηση  λέμε ότι έχει **τοπικά ελάχιστο** στο  αν υπάρχει  με  ώστε  για κάθε .

**Τοπικά ακρότατα** μιας συνάρτησης  λέγονται τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της .

**Παραδειγματα**

****

Μονο οι συναρτησεις  ειναι 1-1.

**Παραδειγμα**

Η συνάρτηση ,  δεν είναι 1-1, αλλα η  είναι 1-1 και επι. Η αντίστροφη της συμβολίζεται με .

**Ασκηση**

Εστω η συναρτηση .

α) Βρειτε το πεδιο ορισμου και το πεδιο τιμων της  **.**

β) Δειξτε οτι η  δεν ειναι 1-1.

**Ορισμος.**  Έστω  και . Θα λέμε ότι το **όριο** της  είναι  όταν το  τείνει στο  εάν για κάθε ε > 0 υπάρχει δ > 0 ετσι ώστε:

  με  τότε ||< ε.

Πρακτικα ο παραπανω ορισμος λεει οτι αν  και  (δηλαδη το πλησιαζει το 0) τοτε  (δηλαδη το  πλησιαζει το ).

Συμβολικα γραφουμε ,

**Παραδειγμα**

 Εστω η συναρτηση  με  . Δειξτε οτι

.

**Αποδειξη ©**

**Προταση** Ισχυει το εξης

 

(Η αποδειξη θα γινει αργοτερα) ©

Έστω  και . Θα λέμε ότι η  είναι **συνεχής στο ** όταν 

Δηλαδη, αν

  και  τοτε 

Μία συνάρτηση  λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής για κάθε .

**ΠΡΟΤΑΣΗ**

Ολες οι συναρτησεις που οριζονατι με ενιαιο τυπο ειναι συνεχεις. Για παραδειγμα οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς

 σταθερα.

 (δηλαδη φυσικος αριθμος)

 (δηλαδη ακεραιος αριθμος)







**ΠΡΟΤΑΣΗ (ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων)**

Αν οι συναρτήσεις είναι συνεχείς τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις

 (άθροισμα/διαφορα συναρτήσεων)

, (γινόμενο συναρτήσεων)

, (πηλίκο συναρτήσεων)

 (σύνθεση συναρτήσεων)

όταν και όπου αυτές ορίζονται.

**ΠΡΟΤΑΣΗ**

Αν η  είναι 1-1 και συνεχής τότε και η  είναι συνεχής.

**ΘΕΩΡΗΜΑ** (ενδιάμεσης τιμής)

Αν  είναι συνεχής τότε η εικόνα  της  περιλαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των και .

Σαν πορισμα του παραπανω εχουμε το εξης πορισμα.

**Πορισμα**

Εστω *Ι* διαστημα και  συνεχης συναρτηση. Αν και 

Τοτε υπαρχει σημειο  ετσι ωστε .

Ισχύει κάτι πιο γενικό:

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν  είναι συνεχής τότε η εικόνα  της  είναι ένα κλειστό διάστημα [ξ, η].

**Ασκησεις.**

1. Βρειτε τα εξης ορια

(α)  (β)  (γ) 

(δ))  (ε) 

1. Εστω η συναρτηση . Να υπολογιστει το συνολο .
2. Να βρεθουν οι αντιστροφες των συναρτησεων , , 

Εξεταστε πρωτα αν υπαρχουν οι αντιστροφες συναρτησεις.

**4.** Αποδειξτε οτι η εξισωση  εχει μια τουλαχιστον πραγματικη ριζα.

**5**. Να λυθει η εξισωση 