

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε όλες τις μερικές παραγωγούς δευτερης τάξεως των παρακατω συναρτησεων και επαληθευστε οτι  $f_{xy} = f_{yx}$

$$f(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x, \quad f(x, y) = x e^{y^2/2}, \quad f(x, y) = \ln(x + \ln(x + y)),$$

$$f(x, y) = e^y \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^3}{x^3 - y^2}$$

2. Η τρισδιαστατη εξισωση Laplace είναι η εξής  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ . Δειξτε οτι οι εξής συναρτησεις ικανοποιουν την εξισωση Laplace (α)  $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  (β)  $e^{3x+4y} \cos 5z$

3. (α) Βρείτε το  $\partial w / \partial r$  για  $r=1, s=-1$ , αν  $w = (x + y + z)^2$ , αν  $x = r - s$ ,  $y = \cos(r + s)$ ,  $z = \sin(r + s)$ .

(γ) Βρείτε το  $dw/dt$  για  $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ ,  $x = \cos^2 t$ ,  $y = \sin^2 t$ ,  $z = 1/t$ ,  $t = 3$ .

4. Τα μηκη  $a, b, c$  των ακμων ορθογωνιου κιβωτιου μεταβαλλονται με τον χρονο. Την στιγμη που μας ενδιαφερει,  $a=1$  m,  $b=2$  m,  $c=3$  m,  $da/dt = db/dt = 1$  m/sec,  $dc/dt = -3$  m/sec. Με ποιον ρυθμο μεταβαλλεται τοτε ο ογκος  $V$  και το επιφανειακο εμβαδον  $S$  του κιβωτιου? Μεγαλωνει η μικραινει το μηκος των εσωτερικων διαγωνιων?

5. Αν η  $f(u, v, w)$  είναι διαφορισιμη και  $u = x - y$ ,  $v = y - z$ ,  $w = z - x$ , δειξτε οτι  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ .

6. Εστω οτι σε μια διαφορισιμη συναρτηση  $w = f(x, y)$  αντικαθιστουμε τις καρτεσιανες συντεταγμενες με τις πολικες, μεσω των εξισωσεων  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Δειξτε οτι (α)  $\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$  και  $\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta$

(β)  $(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$ .

7. Αν  $z = f(x - y)$  είναι διαφορισιμη, δειξτε οτι  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

8. Δειξτε οτι αν η  $w = f(s)$  είναι τυχουσα διαφορισιμη συναρτηση του  $s$  και  $s = y + 5x$ , τοτε  $\frac{\partial w}{\partial x} - 5 \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ .

9. Για τις επομενες συναρτησεις βρείτε τα τοπικα μεγιστα, ελαχιστα και σαγματικα σημεια.

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 3y^2, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3, \quad f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$$

10. Βρείτε την ελαχιστη αποσταση της επιφανειας  $2x + 3y - z = 3$  απο το σημειο  $(0, 0, 0)$ .

**16.** Εστω  $T(x, y)$  η θερμοκρασία στο σημείο  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  του μοναδιαίου κύκλου. Εστω επίσης  $\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x$ .

Ένα μυρμηγκί κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Βρείτε σε ποια σημεία του κύκλου αισθάνεται την θερμότερη και ψυχρότερη θερμοκρασία.