

1.3.1 Η οικογένεια των μεθόδων ELECTRE

Η μέθοδος ELECTRE¹ περιλαμβάνει μία οικογένεια πολύ-κριτηριακών αλγορίθμων ανάλυσης που επινοήθηκαν στην Γαλλία την δεκαετία του 1960. Προτάθηκε από τον Bernard Roy και τους συναδέλφους του στο LAMSADE² για την επίλυση ενός πολύ-κριτηριακού προβλήματος της εταιρείας που συμβούλευαν σχετικά με το ποια νέα προϊόντα συνέφερε να αναπτύξει. Η κλασική μέθοδος με τους σταθμισμένους μέσους όρους παρουσίαζε προβλήματα και έτσι ο Roy επινόησε την μέθοδο ELECTRE. Η μέθοδος αυτή έγινε ευρύτερα γνωστή όταν δημοσιεύθηκε σε ένα γαλλικό περιοδικό επιχειρησιακής έρευνας³ και από τότε και στη συνέχεια αποτέλεσαν κύριο ερευνητικό πεδίο απο όπου έχουν προκύψει οι συναφείς μέθοδοι ELECTRE I, ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV, ELECTRE IS και ELECTRE TRI.

Ο σκοπός της μεθόδου είναι να ξεχωρίσει τις εναλλακτικές δράσεις οι οποίες είναι προτιμητέες στην πλειονότητα των κριτηρίων και ταυτόχρονα δεν παραβιάζουν κάποια μη ανεκτά επίπεδα δυσαρέσκειας στα υπόλοιπα κριτήρια. Είναι κατάλληλη για τα προβλήματα στα οποία υπάρχουν τουλάχιστον τρία κριτήρια τα οποία είναι αρκετά ετερογενή (π.χ. κόστος, μερίδιο αγοράς, ικανοποίηση συνεργατών κλπ).

Οι προτιμήσεις παριστάνονται κατά βάση χρησιμοποιώντας την σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων S : "τουλάχιστον καλή όσο". Έτσι για δύο δράσεις a, b ανά κριτήριο μπορούν να ισχύουν τα εξής:

- Για γνήσιο κριτήριο K
 - aSb (η δράση a στο κριτήριο K είναι τουλάχιστο όσο καλή είναι η δράση b)
 - όχι aSb (η δράση a στο κριτήριο K δεν είναι τουλάχιστο όσο καλή είναι η δράση b)
- Για ψευδοκριτήριο
 - Λόγω της ύπαρξης ασάφειας, η aSb μπορεί να πάρει τις τιμές στο διάστημα $(0,1]$ που εκφράζει το πόσο ισχυρή είναι η συμφωνία με την προηγούμενη πρόταση
 - όχι aSb

Για το σύνολο των κριτηρίων, η σχέση που μπορεί να έχουν οι δράσεις a και b είναι η εξής:

- aPb : Ισχυρή προτίμηση της a έναντι της b
- bPa : Ισχυρή προτίμηση της b έναντι της a
- aIb και bIa : Αδιαφορία της a έναντι της b και το αντίστροφο
- aQb : Ασθενής προτίμηση της a της b . Είναι μία ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ της aPb και aIb
- bQa : Ασθενής προτίμηση της b της a . Είναι μία ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ της bPa και bIa

¹ **E**limination **E**t **C**hoix **T**raduisant la **R**ealité – Αποκλεισμός και επιλογή που εκφράζει την πραγματικότητα

² Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la DEcision, Université Paris Dauphine

³ Roy, Bernard (1968). "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)". La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle (RIRO) (8): 57–75.

- aRb: Μη συγκρισιμότητα των a και b.

Για την τελική κατάταξη των δράσεων, η μέθοδος συνίσταται στην κατασκευή ενός γράφου στον οποίον αποτυπώνονται όλες οι σχέσεις S μεταξύ των εναλλακτικών δράσεων και η εξαγωγή του υποσυνόλου των Pareto βέλτιστων δράσεων από τις οποίες ο αποφασίζων θα επιλέξει. Το υποσύνολο αυτό είναι οι δράσεις οι οποίες δεν εμφανίζονται να κυριαρχούνται από άλλες.

1.3.1.1 Η μέθοδος Electre IS

Πώς αποφασίζουμε για δύο δράσεις a,b εάν ισχύει aPb ; Για να δεχθούμε ότι ισχύει aPb θα πρέπει να ικανοποιείται το «κριτήριο της συμφωνίας». Δηλαδή η δράση a να είναι προτιμητέα σε ικανή δυναμικότητα (στην πλειοψηφία των κριτηρίων) έναντι της δράσης b. Θα πρέπει επίσης να ικανοποιείται το «κριτήριο της μη-διαφωνίας». Δηλαδή να μην υπάρχει κάποιο κριτήριο στο οποίο η b να είναι πολύ ισχυρά προτιμητέα της a. Σε κάποιες εκδοχές της μεθόδου η διαφωνία λαμβάνεται υπόψη μόνο σε περίπτωση veto. Δηλαδή η συμφωνία όσο ισχυρή και να είναι, ακυρώνεται όταν υπάρχει έστω και ένα κριτήριο που θέτει veto.

Πώς αποφασίζεται η «ικανή δυναμικότητα» για την οποία η δράση a υπερέχει της δράσης b. Για κάθε κριτήριο αρχίζουμε και διενεργούμε συγκρίσεις μεταξύ των εναλλακτικών επιλογών. Κατασκευάζουμε δηλαδή για κάθε κριτήριο ένα πίνακα «μερικής συμφωνίας», στον οποίο αποτυπώνονται οι «μερικές» συγκρίσεις ανά ζεύγη μεταξύ όλων των δράσεων.

Ο τρόπος που κάνουμε τις μερικές αυτές συγκρίσεις στον πίνακα μερικής συμφωνίας διαφοροποιείται ανάλογα με το αν έχουμε γνήσιο κριτήριο ή ψευδοκριτήριο. Πώς γίνονται λοιπόν οι συγκρίσεις στον πίνακα μερικής συμφωνίας ;

Στα γνήσια κριτήρια η πρόταση aSb («Η δράση a είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η δράση b για το κριτήριο K») ισχύει όταν η αποτίμηση της a (g(a)) είναι ίση ή καλύτερη της b (g(b)). Αυτό στην μαθηματική γλώσσα γράφεται:

$$c(a, b) = \begin{cases} 1, \Delta \geq 0 \\ 0, \Delta < 0 \end{cases}$$

όπου,

$$\Delta = \begin{cases} g(a) - g(b), \text{if } \max(g) \\ g(b) - g(a), \text{if } \min(g) \end{cases}$$

όπου c η τιμή της πρότασης aSb και Δ η διαφορά της αποτίμησης στο κριτήριο K της δράσης a από την b.

Στα ψευδοκριτήρια η αξιολόγηση του κατά πόσο μία δράση είναι καλύτερη από μία άλλη σε ένα κριτήριο είναι δυνατόν να λάβει τιμές στο διάστημα [0,1] και αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση *κατωφλίου αδιαφορίας(q)* και *κατωφλίου προτίμησης(p)*. Η μαθηματική σχέση που διέπει την τιμή της αποτίμησης στην περίπτωση ενός ψευδοκριτηρίου είναι (βλέπε Σχήμα 1):

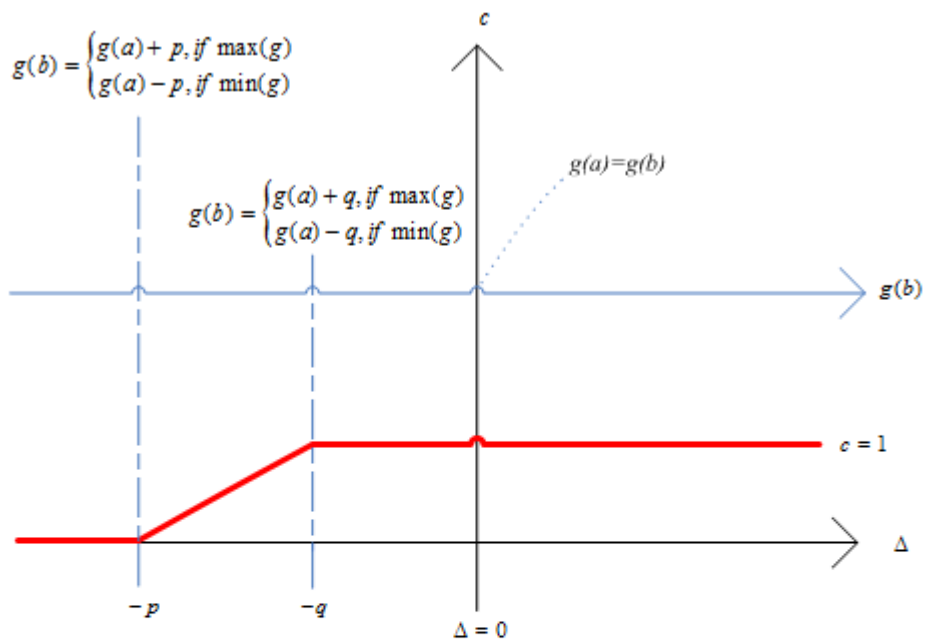
$$c(a, b) = \begin{cases} 1, & \Delta \geq -q \\ 0, & \Delta \leq -p \\ (p + \Delta) / (p - q), & -p < \Delta < -q \end{cases}$$

όπου πάλι

$$\Delta = \begin{cases} g(a) - g(b), & \text{if } \max(g) \\ g(b) - g(a), & \text{if } \min(g) \end{cases}$$

Για να γίνει η χρήση ψευδοκριτηρίων πιο κατανοητή, , έστω Δ_j η διαφορά των αποτιμήσεων δύο δράσεων $g_j(a) - g_j(b)$ σε ένα κριτήριο j όπου η μεγαλύτερη τιμή είναι και καλύτερη (περίπτωση μεγιστοποίησης). Στην περίπτωση ενός γνήσιου κριτηρίου, εάν $\Delta_j \geq 0$ τότε υπάρχει πλήρης συμφωνία με την πρόταση $a \leq b$. Απο την άλλη εάν $\Delta_j < 0$ ακόμα και για πολύ λίγο, δεν υπάρχει συμφωνία με το $a \leq b$. Αυτή η απότομη εναλλαγή σε έναν κόσμο αβεβαιότητας και σχετικότητας είναι μάλλον μειονέκτημα. Στην πραγματικότητα δεν είμαστε σε θέση να εκφράσουμε κατηγορηματική άποψη για μικρές διαφορές στις επιδόσεις εναλλακτικών δράσεων σε κάποιο κριτήριο, Για παράδειγμα όταν συγκρίνουμε δύο επενδυτικές προτάσεις με βάση την επιστροφή στα κεφάλαια μια διαφορά 1% δεν είναι ικανή να κάνει τον επενδυτή να προτιμήσει σαφώς το ένα έναντι του άλλου. Αρχίζει και εκφράζει προτίμηση και αυτή όχι σαφή, αλλά αυτό που θα λέγαμε "ασθενή προτίμηση" από ποσοστό 1% και πάνω. Το ποσοστό αυτό είναι αυτό που ονομάζουμε κατώφλι αδιαφορίας γιατί κάτω από αυτό τα δύο σχέδια του είναι αδιάφορα. Αν υποθέσουμε ότι μια διαφορά 3% και άνω είναι αρκετή για να εκφράσει με σαφήνεια την προτίμηση του, αυτό ονομάζεται κατώφλι προτίμησης σε σχέση με το συγκεκριμένο κριτήριο.

Στο Σχήμα 1 αποτυπώνεται πως λειτουργούν τα κατώφλια αυτά. Πρακτικά στην περίπτωση ενός ψευδοκριτηρίου με κατώφλι αδιαφορίας q , υπάρχει ανοχή στο να θεωρήσουμε το $g(a)$ "τουλάχιστον τόσο καλό όσο και" το $g(b)$, ακόμα και αν το $g(b)$ λαμβάνει καλύτερη τιμή (το ανώτερο κατά q) στο συγκεκριμένο κριτήριο. Επιπλέον με τα ψευδοκριτήρια υπάρχει η δυνατότητα να δώσουμε διαφορετική απάντηση από Ναι (=1) ή Όχι (=0) στην πρόταση «η εναλλακτική a είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο και η b στο τάδε κριτήριο». Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση του κατωφλίου προτίμησης και φαίνεται παραστατικά με την κεκλιμένη κόκκινη γραμμή στο Σχήμα 1. Όταν η b παίρνει τιμή αποτίμησης $g(b)$ καλύτερη κατά p ή περισσότερο, τότε στην πρόταση «η εναλλακτική a είναι τουλάχιστον όσο καλή και η b » δίνουμε την τιμή 0. Όταν όμως η $g(b)$ είναι μεγαλύτερη κατά κάτι λιγότερο από p , τότε η πρόταση «η εναλλακτική a είναι τουλάχιστον όσο καλή και η b » αρχίζει και λαμβάνει τιμή κατά κάτι μεγαλύτερη από 0, μέχρι να φτάσουμε το κατώφλι αδιαφορίας, όπου πλέον η αποτίμηση της πρότασης γίνεται 1.



Υπόμνημα:

$g(a)$: αποτίμηση δράσης a
 $g(b)$: αποτίμηση δράσης b
 Δ : Διαφορά αποτίμησης δράσεων
 p : κατώφλι προτίμησης
 q : κατώφλι αδιαφορίας

$$\Delta = \begin{cases} g(a) - g(b), & \text{if } \max(g) \\ g(b) - g(a), & \text{if } \min(g) \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} 1, & \Delta \geq -q \\ 0, & \Delta \leq -p \\ \frac{(p + \Delta)}{(p - q)}, & -p < \Delta < -q \end{cases}$$

Σχήμα 1. Τρόπος αποτίμησης $a \geq b$ για ένα ψευδοκριτήριο

Κάνοντας όλες τις απαιτούμενες συγκρίσεις, καταλήγουμε σε τόσους πίνακες μερικής συμφωνίας όσοι και τα κριτήρια του προβλήματος μας. Ένας πίνακας μερικής συμφωνίας για το κριτήριο k έχει την παρακάτω μορφή:

Κριτήριο k	Δράση a	Δράση b	Δράση c
Δράση a	1	Σύγκριση a-b	Σύγκριση a-c
Δράση b	Σύγκριση b-a	1	Σύγκριση b-c
Δράση c	Σύγκριση c-a	Σύγκριση a-b	1

Πίνακας 1-2, Παράδειγμα Πίνακα Μερικής Συμφωνίας

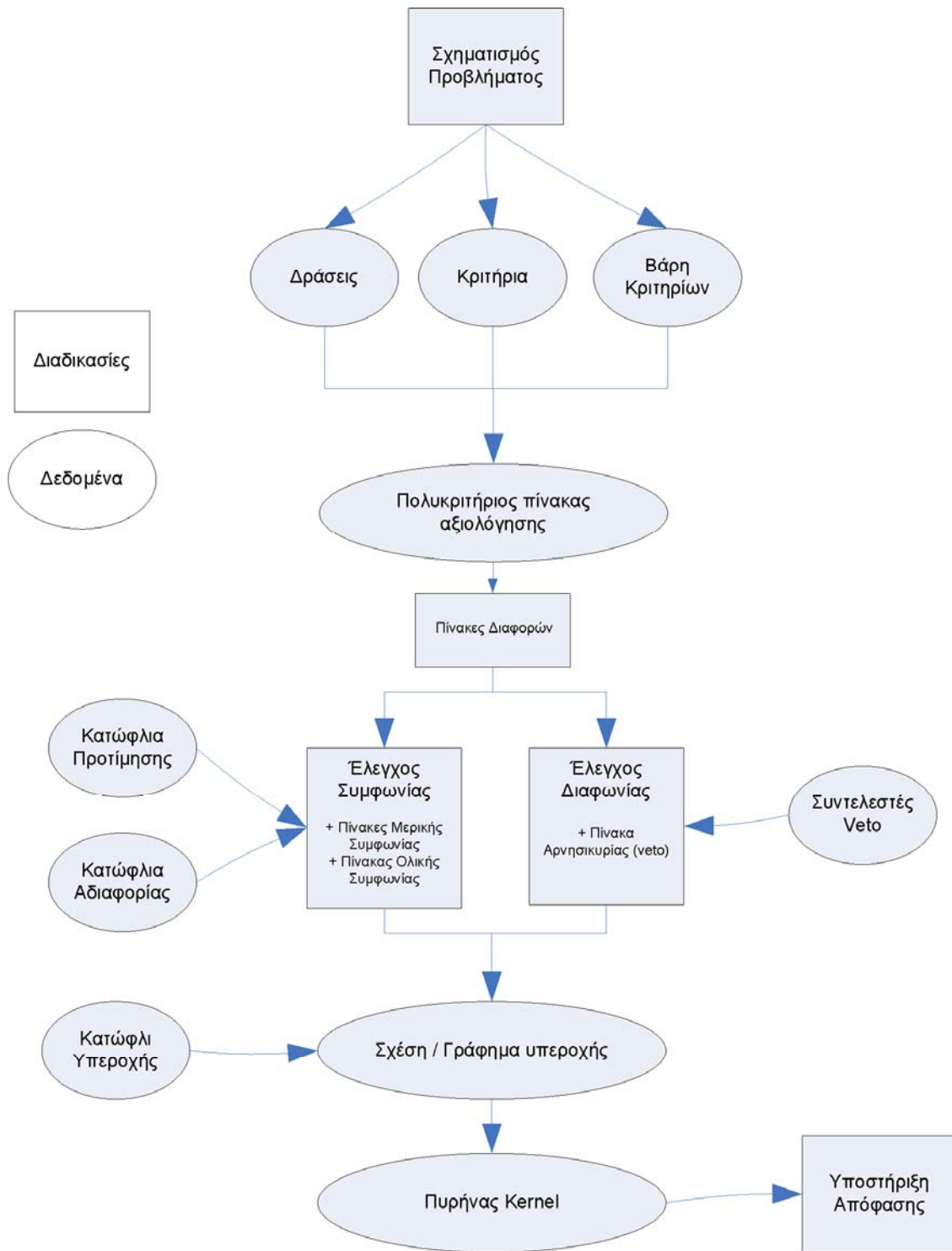
Από την στιγμή που έχουμε τους πίνακες μερικής συμφωνίας μπορούμε αθροίζοντας τις επιμέρους αποτιμήσεις με στάθμιση το βάρος του κάθε κριτηρίου να υπολογίσουμε τον πίνακα «ολικής συμφωνίας».

Υπολογίζουμε επίσης έναν **πίνακα αρνησικυρίας (veto)**, ο οποίος εκφράζει τη διαφωνία που δεν μπορεί να αντισταθμιστεί από καμία τιμή ολικής συμφωνίας για τα ζεύγη τα οποία λόγω του κατωφλίου veto δεν είναι δυνατόν να αποτελούν επιλογές μας. Αν έστω και σε ένα κριτήριο η διαφωνία για την πρόταση α 'τουλάχιστο όσο καλή και η" β είναι τόσο ηχηρή ακυρώνει την συμφωνία των υπόλοιπων κριτηρίων. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του veto ανατρέξτε στο παράδειγμα 1 στην συνέχεια.

Συνδυάζοντας τον «πίνακα ολικής συμφωνίας» και τον «πίνακα αρνησικυρίας» καταλήγουμε στον **«πίνακα υπεροχής»** ο οποίος εκφράζει όλες τις σχέσεις aPb. Στη συνέχεια ορίζουμε το επίπεδο τιμών (κατώφλι υπεροχής) πάνω από το οποίο θεωρούμε ότι η ολική συμφωνία υποδεικνύει υπεροχή μιας εναλλακτικής έναντι μιας άλλης. Ο πίνακας υπεροχής αποτυπώνεται και σε γράφο ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η μερική διάταξη των επιλογών με βάση την οποία θα ληφθεί η απόφαση.

Η εφαρμογή της μεθόδου παρουσιάζεται συνοπτικά στο Σχήμα 2. Στην πράξη η υλοποίηση μπορεί να γίνει σε εφαρμογή λογιστικού φύλλου (π.χ. ms-excel, Libreoffice Calc, κλπ) και περιλαμβάνει πέντε βήματα: (1) την δημιουργία των πινάκων διαφορών για κάθε κριτήριο, (2) την δημιουργία των πινάκων μερικής συμφωνίας για κάθε κριτήριο, (3) την δημιουργία του πίνακα συνολικής συμφωνίας που προκύπτει από το άθροισμα των πινάκων μερικής συμφωνίας (4) την δημιουργία του πίνακα αρνησικυρίας (5) την δημιουργία του πίνακα υπεροχής από τον συνδυασμό των πινάκων συνολικής συμφωνίας και αρνησικυρίας.

Τα δύο παραδείγματα τα οποία λύνονται σε αυτό το φυλλάδιο έχουν επιλυθεί και στο ms-excel και είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα του μαθήματος.



Πηγή: Προσαρμογή από http://mnglearning.teipir.gr/lesson/les432/Kefalaio7/Kefalaio_7_files/frame.htm

Σχήμα 2, Η μέθοδος ELECTRE IS σε διάγραμμα ροής.

1.3.1.2 Παράδειγμα 1, μέθοδος ELECTRE IS, Γνήσια Κριτήρια

Έχουμε ένα πρόβλημα απόφασης όπου κάποιος θέλει να επιλέξει μεταξύ εναλλακτικών μέσων μεταφοράς ή συνδυασμού αυτών για την μετακίνηση του από το σπίτι στην εργασία.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τον παρακάτω πολυκριτήριο πίνακα αξιολόγησης:

	<i>min</i>	<i>min</i>	<i>min</i>	<i>min</i>
Πολυκριτήριος Πίνακας Αξιολόγησης	Κόστος / Διαδρομή(€)	Χρόνος Διαδρομής (λεπτά)	Αξιοπιστία Χρόνου ¹ (κλίμακα)	Άνεση ² (κλίμακα)
Μετρό& Ποδήλατο	2,80	75	1	3
Λεωφορείο&Μετρό	2,80	85	3	4
Ποδήλατο	0	60	1	4
Αυτοκίνητο	3	50	2	1
Ταξί	7	55	2	2
Στάθμιση	0,3	0,3	0,2	0,2
Κατώφλι Veto	4	40	2	4

¹ Η κλίμακα της αξιοπιστίας του χρόνου ως εξής: 1= Πολύ αξιόπιστος, 2=Μέτρια, 3= Λίγο Αξιόπιστος

² Η κλίμακα της άνεσης έχει ως εξής: 1= Πολύ άνετα, 2= Άνετα, 3=Μέτρια, 4=Δύσκολα, 5= Πολύ δύσκολα

Ας παρατηρήσουμε στον παραπάνω πίνακα ότι επειδή όλα τα κριτήρια μας είναι γνήσια κριτήρια, δεν υπάρχουν τιμές για τα κατώφλια p,q.

Βήμα 1ο και 2ο

Στην υλοποίηση στο λογιστικό φύλλο απλουστεύεται η διαδικασία εάν δημιουργήσουμε τους "πίνακες διαφορών" οι οποίοι θα εκφράζουν την διαφορά στην αποτίμηση μεταξύ των δράσεων ανά κριτήριο. Οι "πίνακες διαφορών" θα πρέπει να φτιαχτούν με τέτοιο τρόπο ώστε όταν για ένα κριτήριο η διαφορά είναι μεγαλύτερη του μηδενός η δράση a να έχει καλύτερη αποτίμηση από την b.

Στην επίλυση που κάνουμε εδώ θα προχωρήσουμε στην σύνταξη των πινάκων μερικής συμφωνίας για κάθε κριτήριο, δείχνοντας αναλυτικά το πώς προκύπτει το κάθε αποτέλεσμα μέσα στο ίδιο τον πίνακα. Έχουμε 4 κριτήρια, άρα θα έχουμε και 4 πίνακες μερικής συμφωνίας.

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Κόστος Δ^1 .	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο&Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	0	1	1
	$\Delta=2,8-2,8=0$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=0-2,8=-2,8$ $\Delta < 0$	$\Delta=3-2,8=0,2$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=7-2,8=4,2$ $\Delta \geq 0$	
Λεωφορείο&Μετρό	1	1	0	1	1
	$\Delta=2,8-2,8=0$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=0-2,8=-2,8$ $\Delta < 0$	$\Delta=3-2,8=0,2$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=7-2,8=4,2$ $\Delta \geq 0$
Ποδήλατο	1	1	1	1	1
	$\Delta=2,8-0=2,8$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=2,8-0=2,8$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=3-0=3$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=7-0=7$ $\Delta \geq 0$
Αυτοκίνητο	0	0	0	1	1
	$\Delta=2,8-3=-0,2$ $\Delta < 0$	$\Delta=2,8-3=-0,2$ $\Delta < 0$	$\Delta=0-3=-3$ $\Delta < 0$		$\Delta=7-3=4$ $\Delta \geq 0$
Ταξί	0	0	0	0	1
	$\Delta=2,8-7=-4,2$ $\Delta < 0$	$\Delta=2,8-7=-4,2$ $\Delta < 0$	$\Delta=0-7=-7$ $\Delta < 0$	$\Delta=3-7=-4$ $\Delta < 0$	

¹ επειδή θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος , $\Delta(a,b)=g(b)-g(a)$

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Χρόνος Δ^1 .	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο&Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	0	0	0
	$\Delta=85-75=10$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=60-75=-15$ $\Delta < 0$	$\Delta=50-75=-25$ $\Delta < 0$	$\Delta=55-75=-20$ $\Delta < 0$	
Λεωφορείο&Μετρό	0	1	0	0	0
	$\Delta=75-85=-10$ $\Delta < 0$		$\Delta=60-85=-25$ $\Delta < 0$	$\Delta=50-85=-35$ $\Delta < 0$	$\Delta=55-85=-30$ $\Delta < 0$
Ποδήλατο	1	1	1	0	0
	$\Delta=75-60=15$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=85-60=25$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=50-60=-10$ $\Delta < 0$	$\Delta=55-60=-5$ $\Delta < 0$
Αυτοκίνητο	1	1	1	1	1
	$\Delta=75-50=25$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=85-50=35$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=60-50=10$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=55-50=5$ $\Delta \geq 0$
Ταξί	1	1	1	0	1
	$\Delta=75-55=20$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=85-55=30$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=60-55=5$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=50-55=-5$ $\Delta < 0$	

¹ επειδή θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο διαδρομής $\Delta(a,b)=g(b)-g(a)$

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Αξιοπιστία ¹	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο&Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	1	1	1
		$\Delta=3-1=2$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=1-1=0$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=2-1=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=2-1=1$ $\Delta \geq 0$
Λεωφορείο&Μετρό	0	1	0	0	0
	$\Delta=1-3=-2$ $\Delta < 0$		$\Delta=1-3=-2$ $\Delta < 0$	$\Delta=2-3=-1$ $\Delta < 0$	$\Delta=2-3=-1$ $\Delta < 0$
Ποδήλατο	1	1	1	1	1
	$\Delta=1-1=0$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=3-1=2$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=2-1=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=2-1=1$ $\Delta \geq 0$
Αυτοκίνητο	0	1	0	1	1
	$\Delta=1-2=-1$ $\Delta < 0$	$\Delta=3-2=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=1-2=-1$ $\Delta < 0$		$\Delta=2-2=0$ $\Delta \geq 0$
Ταξί	0	1	0	1	1
	$\Delta=1-2=-1$ $\Delta < 0$	$\Delta=3-2=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=1-2=-1$ $\Delta < 0$	$\Delta=2-2=0$ $\Delta \geq 0$	

¹ επειδή η κλίμακα της αξιοπιστίας είναι ορισμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να θέλουμε να την ελαχιστοποιήσουμε, $\Delta(a,b)=g(b)-g(a)$

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Άνεση.	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο + Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	1	0	0
		$\Delta=4-3=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=4-3=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=1-3=-2$ $\Delta < 0$	$\Delta=2-3=-1$ $\Delta < 0$
Λεωφορείο&Μετρό	0	1	1	0	0
	$\Delta=3-4=-1$ $\Delta < 0$		$\Delta=4-4=0$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=1-4=-3$ $\Delta < 0$	$\Delta=2-4=-2$ $\Delta < 0$
Ποδήλατο	0	1	1	0	0
	$\Delta=3-4=-1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=4-4=0$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=1-4=-3$ $\Delta < 0$	$\Delta=2-4=-2$ $\Delta < 0$
Αυτοκίνητο	1	1	1	1	1
	$\Delta=3-1=2$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=4-1=3$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=4-1=3$ $\Delta \geq 0$		$\Delta=2-1=1$ $\Delta < 0$
Ταξί	1	1	1	0	1
	$\Delta=3-2=1$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=4-2=2$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=4-2=2$ $\Delta \geq 0$	$\Delta=1-2=-1$ $\Delta < 0$	

¹ επειδή η κλίμακα της άνεσης είναι ορισμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να θέλουμε να την ελαχιστοποιήσουμε, $\Delta(a,b)=g(b)-g(a)$

Βήμα 3ο

Θα πρέπει τώρα να συνδυάσουμε τους πίνακες μερικής συμφωνίας για κάθε κριτήριο, ώστε να φτάσουμε σε έναν πίνακα συνολικής συμφωνίας ο οποίος θα δίνει μία εκτίμηση στην ερώτηση "Αν το κριτήριο a είναι τουλάχιστον τόσο καλό όσο το b".

Πίνακας Συνολικής Συμφωνίας	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο&Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	0,4	0,5	0,5
		0,3x1+0,3x1+0,2x1+0,2x1	0,3x0+0,3x0+0,2x1+0,2x1	0,3x1+0,3x0+0,2x1+0,2x0	0,3x1+0,3x0+0,2x1+0,2x0
Λεωφορείο&Μετρό	0,3	1	0,2	0,3	0,3
	0,3x1+0,3x0+0,2x0+0,2x0		0,3x0+0,3x0+0,2x0+0,2x1	0,3x1+0,3x0+0,2x0+0,2x0	0,3x1+0,3x0+0,2x0+0,2x0
Ποδήλατο	0,8	1	1	0,5	0,5
	0,3x1+0,3x1+0,2x1+0,2x0	0,3x1+0,3x1+0,2x1+0,2x1		0,3x1+0,3x0+0,2x1+0,2x0	0,3x1+0,3x0+0,2x1+0,2x0
Αυτοκίνητο	0,5	0,7	0,5	1	1
	0,3x0+0,3x1+0,2x0+0,2x1	0,3x0+0,3x1+0,2x1+0,2x1	0,3x0+0,3x1+0,2x0+0,2x1		0,3x1+0,3x1+0,2x1+0,2x1
Ταξί	0,5	0,7	0,5	0,2	1
	0,3x0+0,3x1+0,2x0+0,2x1	0,3x0+0,3x1+0,2x1+0,2x1	0,3x0+0,3x1+0,2x0+0,2x1	0,3x0+0,3x0+0,2x1+0,2x0	

Βήμα 4ο

Θα κάνουμε τον Έλεγχο Διαφωνίας (veto). Θα εξετάσουμε δηλαδή εάν υπάρχουν περιπτώσεις ανά κριτήριο στις οποίες η διαφορά είναι τόσο μεγάλη ώστε να προκύπτει veto (βλέπε σελίδα 8) : Οι περιπτώσεις στις οποίες ενεργοποιείται ο κανόνας veto είναι οι παρακάτω:

- Ταξί ,(Μετρό& Ποδήλατο
- Ταξί , Λεωφορείο&Μετρό
- Λεωφορείο&Μετρό, Μετρό& Ποδήλατο
- Λεωφορείο&Μετρό, Ποδήλατο

Για αυτές τις περιπτώσεις ακόμα και αν από τον έλεγχο συμφωνίας προκύπτει ισχυρή υπεροχή για μία δράση έναντι μίας άλλης, αυτή ακυρώνεται από τον έλεγχο διαφωνίας. Για παράδειγμα στο ζευγάρι δράσεων "Ταξί, Λεωφορείο&Μετρό" προκύπτει ότι υπάρχει συμφωνία με την πρόταση «Η δράση Ταξί είναι τουλάχιστον όσο και Η δράση (Λεωφορείο&Μετρό)» (δείκτης συνολικής συμφωνίας 0,7). Όμως από τον έλεγχο διαφωνίας στο κριτήριο "Κόστος διαδρομής" υπάρχει διαφορά υπέρ της εναλλακτικής "Λεωφορείο & Μετρό" μεγαλύτερη των 4 ευρώ που είναι το κατώφλι veto και έτσι η πρόταση ακυρώνεται.

Άρα και ο πίνακας αρνησικυρίας διαμορφώνεται ως εξής:

Πίνακας Αρνησικυρίας (veto) ¹	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	0	0	0	0	0
Λεωφορείο&Μετρό	1	0	1	0	0
Ποδήλατο	0	0	0	0	0
Αυτοκίνητο	0	0	0	0	0
Ταξί	1	1	0	0	0

Έτσι ο τελικός πίνακας συνολικής συμφωνίας προκύπτει από τον συνδυασμό του προηγούμενου πίνακα συνολικής συμφωνίας και του πίνακα αρνησικυρίας. Σε όποια καταχώρηση υπάρχει μονάδα στον πίνακα αρνησικυρίας τότε αυτομάτως στον νέο πίνακα συνολικής συμφωνίας καταχωρείται το μηδέν.

Ο νέος πίνακας στην περίπτωση μας θα είναι:

Τελικός Πίνακας Συνολικής Συμφωνίας	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	0,4	0,5	0,5
Λεωφορείο&Μετρό	0	1	0	0,3	0,3
Ποδήλατο	0,8	1	1	0,5	0,5
Αυτοκίνητο	0,5	0,7	0,5	1	1
Ταξί	0	0	0,5	0,2	1

Με έντονα γράμματα οι καταχωρήσεις του πίνακα που τροποποιήθηκαν εξαιτίας του πίνακα αρνησικυρίας.

Βήμα 5ο

Για να καταλήξουμε στον **πίνακα υπεροχής** είναι απαραίτητο να καθορίσουμε έναν κατώφλι υπεροχής, πάνω από το οποίο θα θεωρούμε ότι ισχύει η πρόταση «Η δράση α υπερέρχει της δράσης β». Έστω ότι καθορίζουμε το κατώφλι υπεροχής να είναι 0,7. Όσες δράσεις έχουν στον πίνακα συμφωνίας τιμή ίση ή μεγαλύτερη του 0,7 και δεν εμποδίζονται από τον έλεγχο διαφωνίας, τοποθετούνται ανάλογα στον γράφο υπεροχής. Ο πίνακας υπεροχής, για κατώφλι 0,7 γίνεται:

Πίνακας Υπεροχής Κατώφλι υπεροχής=0,7	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο&Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	0	0	0	0	0
Λεωφορείο&Μετρό	0	0	0	0	0
Ποδήλατο	1	1	0	0	0
Αυτοκίνητο	0	1	0	0	1
Ταξί	0	0	0	0	0
Κάθετο άθροισμα	1	2	0	0	1

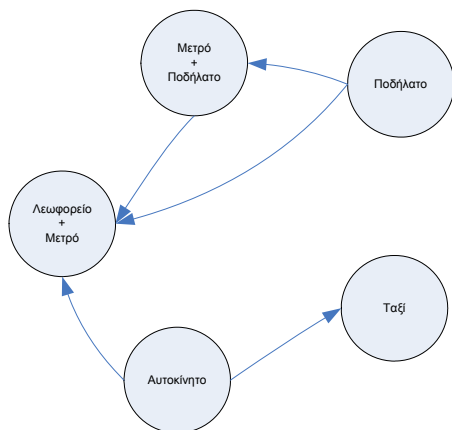
Το κάθετο άθροισμα υποδηλώνει τον αριθμό των επιλογών που υπερéχουν έναντι εκείνης που βρίσκεται σε κάθε στήλη. Αυτές που έχουν μηδέν ανήκουν στην πρώτη ομάδα δηλαδή δεν υπάρχει καμία που να υπερéχει απέναντι τους, παρόλα αυτά δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους. Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε την εξής μερική κατάταξη:

{ Ποδήλατο , Αυτοκίνητο }

{ Μετρό& Ποδήλατο , Ταξί }

{ Λεωφορείο&Μετρό }

Μπορούμε να απεικονίσουμε τα αποτελέσματα του πίνακα υπεροχής στον γράφο υπεροχής, ο οποίος έχει ως εξής:



Σχήμα 3, Γράφος υπεροχής Παραδείγματος 1

Για να βρούμε τον πυρήνα του παραπάνω γράφου, δηλαδή τις λύσεις οι οποίες υπερτερούν έναντι των υπολοίπων προχωρούμε ως εξής: Βρίσκουμε όλες τις δράσεις οι οποίες δεν υποσκελίζονται από κάποιες άλλες και τις βάζουμε στον πυρήνα. Όσες δράσεις υποσκελίζονται από τις δράσεις του πυρήνα δεν ανήκουν στον πυρήνα. Έτσι στο προκείμενο γράφημα, στον πυρήνα ανήκουν οι δράσεις «Αυτοκίνητο» και «Ποδήλατο». Αυτές οι δύο εναλλακτικές κατατάσσονται πρώτες "ex aequo", επομένως δεν μπορούμε να προτιμήσουμε την μια ή την άλλη. Ανάλυση ευαισθησίας σε ότι αφορά τη στάθμιση των

κριτηρίων θα έδινε πιθανά διαφοροποίηση και θα υποδείκνυε τη βέλτιστη επιλογή. Εναλλακτικά η ίδια η αξιολόγηση των εναλλακτικών δράσεων ειδικά στα κριτήρια που εκφράζονται σε ποιοτική κλίμακα μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης και ενδεχόμενη διαφοροποίηση να δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι στο κριτήριο άνεση το «αυτοκίνητο» παίρνει την καλύτερη τιμή ενώ το «ποδήλατο» μια πολύ χαμηλή. Για έναν ποδηλάτη η επαφή με τον άνεμο και το περιβάλλον καθώς και η σωματική προσπάθεια αξιολογούνται καλύτερα επομένως μία διαφορετική βαρύτητα στις προτιμήσεις να έδινε διαφορετικές τιμές στο κριτήριο αυτό και ενδεχομένως διαφορετικό τελικό αποτέλεσμα.

1.3.1.3 Παράδειγμα 2, μέθοδος ELECTRE IS, Ψευδοκριτήρια

Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα απόφασης όπου κάποιος παραγωγός θέλει να επιλέξει κάποια καλλιέργεια για ένα αγροτεμάχιο 30 στρεμμάτων. Προκύπτει ο παρακάτω πολυκριτήριος πίνακας

	max	min	min	max
Πολυκριτήριος Πίνακας Αξιολόγησης	Αναμενόμενο Ακ. Κέρδος (€/στρέμμα)	Ρίσκο Αναμενόμενων Εσόδων ¹	Απαιτήσεις σε προσωπική εργασία (ώρες/στρέμμα)	Προηγούμενη Εμπειρία ²
Βαμβάκι	240 ³	15%	11	100%
Βιομηχανική Ντομάτα	290 ⁴	5%	80	0%
Αγρανάπαυση	95	0%	0	100%
Βάρη Κριτηρίων	0,3	0,3	0,2	0,2
Κατώφλι Veto	200	50%	-	-
Κατώφλι Προτίμησης	80	15%	20	30%
Κατώφλι Αδιαφορίας	20	5%	10	10%

¹ Για το Ρίσκο Αναμενόμενων Εσόδων η τιμή 0% σημαίνει ότι τα αναμενόμενα έσοδα δεν έχουν ρίσκο ενώ τιμή 100% έχουν πάρα πολύ υψηλό ρίσκο

² Για την προηγούμενη εμπειρία, τιμή 100% σημαίνει ότι υπάρχει πάρα πολύ μεγάλη εμπειρία στην καλλιέργεια, τιμή 0% ότι είναι η πρώτη φορά που καλλιεργεί την καλλιέργεια ο παραγωγός

³ Τα σχετικά νούμερα του πίνακα προέκυψαν από δεδομένα που αφορούν την καλλιεργητική περίοδο 2012 ως εξής:

Πρόσοδος: 350 ευρώ/στρέμμα, δηλαδή 80,5 ευρώ/στρ., που είναι η συνδεδεμένη ενίσχυση, εφόσον ως χώρα δεν ξεπεράσουμε τα 2,5 εκατ στρέμματα, 95 ευρώ/στρ. η ενιαία ενίσχυση, 50 ευρώ η συμμετοχή στο πρόγραμμα απονιτροποίησης (τα υπόλοιπα 2-3 ευρώ/στρ. πηγαίνουν στον μελετητή), 20 ευρώ/στρ η επιστροφή του ΦΠΑ και του πετρελαίου, ενώ η εμπορική αξία του προϊόντος για 350 κιλά μέση παραγωγή επί 30 λεπτά/κιλό ανέρχεται στα 105 ευρώ/στρ..

Κόστη: Έξοδα περίπου 110 ευρώ/στρ., ήτοι σπόρια 10-12 ευρώ/στρ., λιπάσματα 20-30 ευρώ/στρ., ζιζανιοκτονία 7-10 ευρώ/στρ., έξοδα συγκομιδής 18-20 ευρώ/στρ., αποφυλλωτικά, Ριχ, ψεκασμοί 5-7 ευρώ/στρ., ποτίσματα 20 ευρώ/στρ., κόστος πετρελαίου στο όργανο 5-10 ευρώ/στρ. Κέρδος:

Πηγή: <http://www.paseges.gr/el/news/Meleth-gia-to-ti-kerdizei-o-agroths-kalliergwntas-bambaki-sithra>

⁴ Τα σχετικά νούμερα του πίνακα προέκυψαν από δεδομένα που αφορούν την καλλιεργητική περίοδο 2012 ως εξής: **Πρόσοδος:** 490 ευρώ/στρ.: (7 τόννους/στρέμμα κιλά μέση παραγωγή επί 70 €/τόννο) , **Κόστη:** 200€/στρέμμα

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Αναμενόμενο Ακ. Κέρδος	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	1	0,5	1
		$\Delta=240-290=-50$ $-q<\Delta<-p$ $=(80-50)/(80-20)=0,5$	$\Delta=240-95=145$ $\Delta>-q$
Βιομηχανική Ντομάτα	1	1	1
	$\Delta=290-240=50$ $\Delta>-q$		$\Delta=290-95=195$ $\Delta>-q$
Αγρανάπαυση	0	0	1
	$\Delta=95-240=-145$ $\Delta<-p$	$\Delta=95-290=-195$ $\Delta<-p$	

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Ρίσκο ¹	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	1	0,5	0
		$\Delta=5-15=-10$ $-p<\Delta<-q=(15-10)/(15-5)$	$\Delta=0-15=-15$ $\Delta<-p$
Βιομηχανική Ντομάτα	1	1	1
	$\Delta=15-5=10$ $\Delta>-q$		$\Delta=0-5=-5$ $\Delta<-q$
Αγρανάπαυση	1	1	1
	$\Delta=15-0=15$ $\Delta>-q$	$\Delta=5-0=5$ $\Delta>-q$	

¹ ΠΡΟΣΟΧΗ: Επειδή σε αυτό το κριτήριο όσο μικρότερη η τιμή τόσο καλύτερα (περίπτωση ελαχιστοποίησης κριτηρίου), η Διαφορά Δ δεν είναι $\Delta=g(a)-g(b)$ αλλά $\Delta=g(b)-g(a)$

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Προσωπική Εργασία ¹	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	1	1	0,9
		$\Delta=80-11=69$ $\Delta>-q$	$\Delta=0-11=-11$ $-p>\Delta>-q$ $=(20-11)/(20-10)=0,9$
Βιομηχανική Ντομάτα	0	1	0
	$\Delta=11-80=-69$ $\Delta<-p$		$\Delta=0-80=-80$ $\Delta<-p$
Αγρανάπαυση	1	1	1
	$\Delta=11-0=1$ $\Delta>-q$	$\Delta=80-0=80$ $\Delta>-q$	

¹ ΠΡΟΣΟΧΗ: Επειδή σε αυτό το κριτήριο όσο μικρότερη η τιμή τόσο καλύτερα (περίπτωση ελαχιστοποίησης κριτηρίου), η Διαφορά Δ δεν είναι $\Delta=g(a)-g(b)$ αλλά $\Delta=g(b)-g(a)$

Πίνακας Μερικής Συμφωνίας Εμπειρία	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	1	1	1
		$\Delta=100-0=100$ $\Delta>-q$	$\Delta=100-100=0$ $\Delta>-q$
Βιομηχανική Ντομάτα	0	1	0
	$\Delta=0-100=-100$ $\Delta<-p$		$\Delta=0-100=-100$ $\Delta<-p$
Αγρανάπαυση	1	1	1
	$\Delta=100-100=0$ $\Delta>-q$	$\Delta=100-0=100$ $\Delta>-q$	

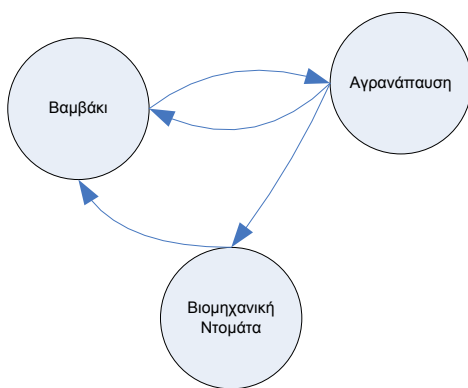
Πίνακας Συνολικής Συμφωνίας	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	1	0,7	0,68
		=0,5x0,3+0,5x0,3+1x0,2+1x0,2	=1x0,3+0x0,3+0,9x0,2+1x0,2
Βιομηχανική Ντομάτα	0,6	1	0,6
	=1x0,3+1x0,3+0x0,2+0x0,2		=1x0,3+1x0,3+0x0,2+0x0,2
Αγρανάπαυση	0,7	0,7	1
	=0x0,3+1x0,3+1x0,2+1x0,2	=0,3x0+1x0,3+1x0,2+1x0,2	

Πίνακας Αρνησικυρίας (veto) ¹	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	0	0	0
Βιομηχανική Ντομάτα	0	0	0
Αγρανάπαυση	0	0	0

¹ Δεν υπάρχουν ζευγάρια εναλλακτικών επιλογών που να εμπίπτουν σε veto

Εάν σαν κατώφλι υπεροχής επιλέξουμε την τιμή 0,6 τότε ο πίνακας και ο γράφος υπεροχής θα είναι αντίστοιχα:

Πίνακας Υπεροχής Κατώφλι=0,6	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	0	0	1
Βιομηχανική Ντομάτα	1	0	0
Αγρανάπαυση	1	1	0
Κάθετο Άθροισμα	2	1	1



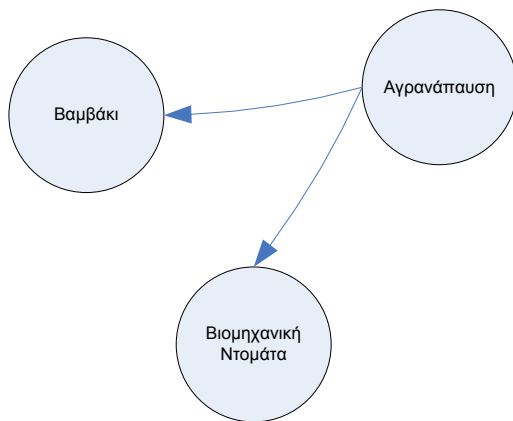
Σχήμα 4, Γράφος υπεροχής στο παράδειγμα 2 με κατώφλι υπεροχής το 0,6

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι ο πυρήνας είναι κενός, δηλαδή δεν περιέχει καμία επιλογή που να μην κυριαρχείται από κάποιαν άλλη. Ο κύριος λόγος γι αυτό είναι ο μικρός αριθμός (3) επιλογών. Πρέπει να αυξήσουμε την τιμή του κατωφλίου για να ξεχωρίσει κάποια εναλλακτική (βλέπε πάνω για 0,7).

Εάν λοιπόν καθορίσουμε το κατώφλι υπεροχής στο 0,7 τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας υπεροχής:

Πίνακας Υπεροχής Κατώφλι=0,7	Βαμβάκι	Βιομηχανική Ντομάτα	Αγρανάπαυση
Βαμβάκι	0	0	0
Βιομηχανική Ντομάτα	0	0	0
Αγρανάπαυση	1	1	0
Κάθετο Άθροισμα	1	1	0

Ο Γράφος υπεροχής φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 5, Γράφος υπεροχής στο παράδειγμα 2 με κατώφλι υπεροχής το 0,7

Η μόνη επιλογή που ανήκει στον πυρήνα είναι η επιλογή «Αγρανάπαυση»

1.3.1.4 Βιβλιογραφία

Μέθοδος Electre I (αγγλικά) <http://electre.no.sapo.pt/MElecI2.htm>

Παρουσίαση Electre – Σχεσιακά Μοντέλα Αποφάσεων (ελληνικά)
http://mnglearning.teipir.gr/lesson/les432/Kefalaio7/Kefalaio_7_files/frame.htm

Παρουσίαση της μεθόδου ELECTRE (αγγλικά),
http://www.vrtuosi.com/OAM/VR_COI002/VR_COI002_3_OA_Electre.pdf

Jose Figueira, Vincent Mousseau, Bernard Roy, «ELECTRE METHODS» (αγγλικά), διαθέσιμο στο
http://l1.lamsade.dauphine.fr/dea103/ens/bouyssou/Outranking_Mousseau.pdf