1.4 Μέθοδος Αναλυτικής Ιεράρχησης

Η μέθοδος Αναλυτικής Ιεράρχησης (Analytical Hierarchical Process, AHP) προτάθηκε από τον Thomas Saaty το 1977 και γνώρισε μεγάλη εξάπλωση και αποδοχή για την επίλυση πολυκριτηριακών προβλημάτων.

Στηρίζεται σε τρείς βασικούς πυλώνες - στάδια:

1. Την διάταξη των κριτηρίων, των υποκριτηρίων και των εναλλακτικών του προβλήματος σε ιεραρχική δομή. Η τελική απόφαση που πρέπει να ληφθεί τοποθετείται στην κορυφή και ακολουθούν τα κριτήρια, τα υποκριτήρια και τελικά οι εναλλακτικές επιλογές στην βάση (βλ. Διάγραμμα 1-1). Η ύπαρξη ιεραρχικής δομής σε ένα πρόβλημα υπονοεί ότι τα ανώτερα επίπεδα επηρεάζουν τις αποφάσεις μας για τα κατώτερα επίπεδα (και ποτέ το αντίστροφο). Σε κάθε επίπεδο δημιουργούνται ομάδες ομοειδών πραγμάτων, για τα οποία τελικά ο αποφασίζων θα πραγματοποιήσει διμερείς συγκρίσεις.
2. Την κατά ζεύγη σύγκριση εντός κάθε ομάδας με βάση μία κλίμακα εννέα σημείων (την θεμελιώδη κλίμακα, fundamental scale) και στη συνέχεια τον υπολογισμό των βαρών των στοιχείων αυτών.
3. Την εύρεση των βαρών των εναλλακτικών επιλογών μέσω της σύνθεσης τους από το σύνολο της ιεραρχικής δομής και των εντός-των-ομάδων βαρών που έχει αποδώσει ο αποφασίζων.

Αμέσως τώρα θα αναλύσουμε τους πυλώνες-στάδια της μεθόδου: Τη διάταξη του προβλήματος σε ιεραρχική δομή, τις κατά ζεύγος συγκρίσεις εντός των ομάδων και τη σύνθεση των τελικών βαρών των εναλλακτικών επιλογών.

Για να γίνει πιο κατανοητό θα παρουσιάσουμε τα τρία στάδια για το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1-1

Παράδειγμα Πολυκριτηριακής επιλογής για την μετακίνηση από το σπίτι στην εργασία

Έχουμε ένα πολυκριτήριο πρόβλημα όπου κάποιος θέλει να επιλέξει τον καλύτερο μεταξύ εναλλακτικών συνδυασμών μέσων μεταφοράς για την μετακίνηση του από το σπίτι στην εργασία. Τα κριτήρια του είναι

"Κόστος Διαδρομής (€)", "Χρόνος διαδρομής (λεπτά)", "Αξιοπιστία χρόνου", "Άνεση"

και οι εναλλακτικές του επιλογές ήταν

"Ποδήλατο", "Μετρό & Ποδήλατο", " Μετρό & Λεωφορείο ", "Αυτοκίνητο", "Ταξί".

Πλαίσιο 1-1

Οι αξιωματικές υποθέσεις της μεθόδου

Ή εφαρμογή της μεθόδου της Αναλυτικής Ιεράρχησης έχει νόημα όταν ισχύουν οι τέσσερις παρακάτω αξιωματικές υποθέσεις:

Α. Το αξίωμα της αμοιβαιότητας

«Έστω ότι συγκρίνουμε το Α με το Β υπολογίζοντας τον λόγο $A/_B = P$, τότε η σύγκριση του Β με το Α (μέσω του λόγου $B/_A$) θα πρέπει να ισούται με 1/P.»

Το αξίωμα αυτό επαληθεύεται σχεδόν πάντα στην ανθρώπινη πραγματικότητα.

Β. Το αξίωμα της ομοιογένειας

«Τα στοιχεία τα οποία συγκρίνονται διμερώς δεν θα πρέπει να διαφέρουν περισσότερο από μία τάξη μεγέθους.»

Αν αυτό δεν ισχύει τότε υπάρχει η τάση οι διμερείς συγκρίσεις να μην είναι ακριβείς. Για αυτό θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στον τρόπο που κατασκευάζουμε την ιεραρχική δομή του προβλήματος.[Παράδειγμα]

Γ. Το αξίωμα της σύνθεσης

«Οι διμερείς συγκρίσεις ενός επιπέδου δεν επηρεάζονται από τα χαμηλότερα επίπεδα.»

Για να δείξουμε πότε αυτό δεν ισχύει, ας δώσουμε ένα αντί-παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να επιλέξουμε μεταξύ κάποιων υπολογιστών και για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε κάποια κριτήρια (π.χ. την μνήμη και την ταχύτητα επεξεργαστή). Σε αυτή την περίπτωση το αξίωμα της σύνθεσης θα ισχύει μόνο και μόνο αν τα βάρη που θα δώσουμε στα δύο κριτήρια (τι είναι πιο σημαντικό για την επιλογή μας, η μνήμη ή η ταχύτητα;) είναι ανεξάρτητο των βαρών που δίνουμε στα παρακάτω επίπεδα, δηλαδή στην σύγκριση των υπολογιστών μεταξύ τους. Στην περίπτωση μας πιθανόν το αξίωμα αυτό να παραβιάζεται. Πώς ; Έστω ότι οι υπολογιστές έχουν τις ίδιες αποδόσεις σε μνήμη. Ο αποφασίζων θα μπορούσε να δώσει μεγαλύτερο βάρος στην ταχύτητα επεξεργαστή. Αν αντίθετα οι εναλλακτικοί υπολογιστές έχουν περίπου ίδια ταχύτητα επεξεργαστή, ο αποφασίζων θα μπορούσε να δώσει μεγαλύτερη βαρύτητα στο κριτήριο της μνήμης. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι συγκρίσεις ενός επιπέδου καθίστανται υποκειμενικές και εξαρτώνται από τις συγκρίσεις στα κατώτερα επίπεδα του προβλήματος.

Δ. Το αξίωμα της εύλογης προσδοκίας

«Για να εκπληρωθούν οι προσδοκίες του αποφασίζοντα σε σχέση με την κατάταξη των εναλλακτικών, θα πρέπει αυτός να έχει συμπεριλάβει με πληρότητα όσα θεωρεί ότι επηρεάζουν την απόφαση του.»

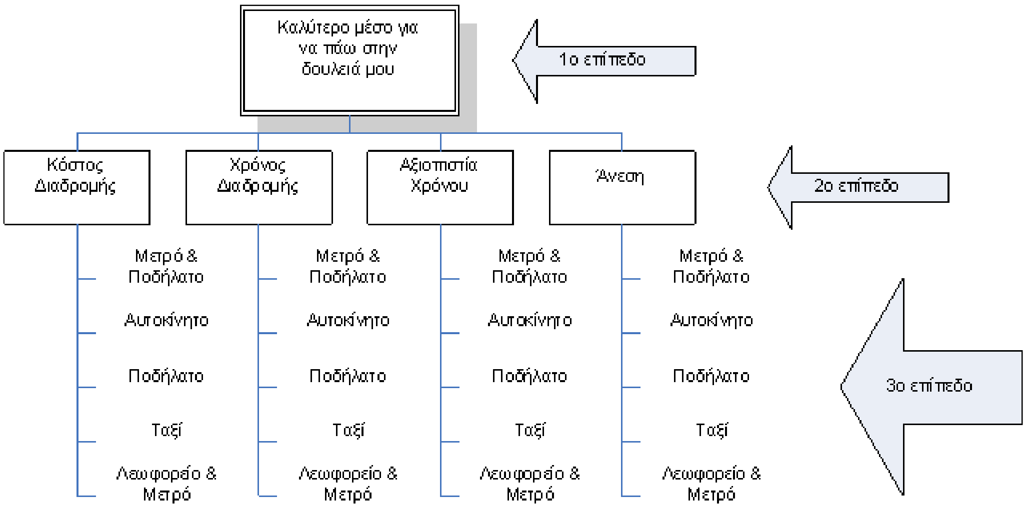
Με άλλα λόγια αν ο αποφασίζων έχει ξεχάσει να συμπεριλάβει κάποιο κριτήριο που θεωρεί σημαντικό στην εφαρμογή της μεθόδου, τότε είναι πολύ πιθανό τα αποτελέσματα της μεθόδου να μην συμφωνούν με την κατάταξη που πίστευε ότι θα έπρεπε να περιέχει το αποτέλεσμα.

Το αξίωμα αυτό είναι μία προειδοποίηση προς αυτούς που χρησιμοποιούν την μέθοδο έτσι ώστε να διερευνούν πιθανά παράλογα αποτελέσματα, καθώς αυτή εδράζεται εν μέρει και στην υποκειμενικότητα του αποφασίζοντα.

1.4.1 Στάδιο 1, Το πρόβλημα σε Ιεραρχική Δομή

Στην πιο απλή μορφή της η ιεραρχική δομή του πολυκριτηριακού μας προβλήματος θα πρέπει να αποτελείται από τρία επίπεδα: Στο ανώτερο επίπεδο θα βρίσκεται ο σκοπός του προβλήματος μας. Στο επόμενο επίπεδο τοποθετούνται τα κριτήρια που έχει θέσει ο αποφασίζων και στο τελευταίο επίπεδο "κρέμονται" οι εναλλακτικές επιλογές.

Για το Παράδειγμα 1-1, η ιεραρχική δομή έχει ως εξής

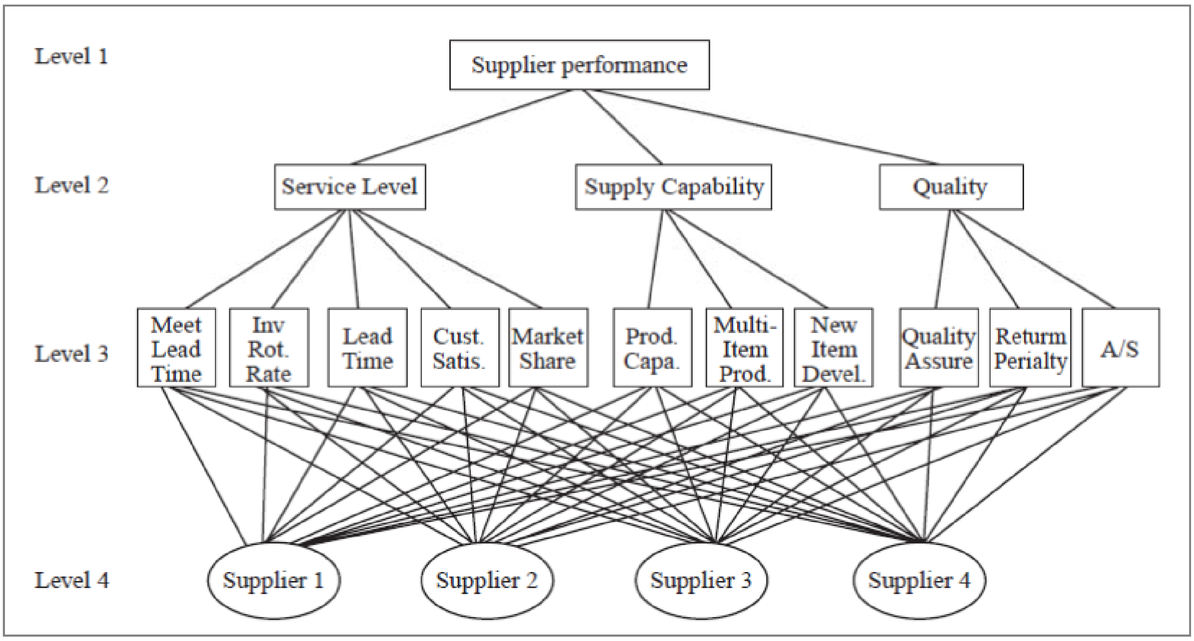


Διάγραμμα 1-1, Απλό παράδειγμα Ιεραρχικής Δομής της AHP

Θα πρέπει εδώ να τονισθεί ότι η ιεραρχική δομή υπονοεί ότι τα κατώτερα επίπεδα δεν επηρεάζουν την κατάταξη των στοιχείων στο αμέσως ανώτερο επίπεδο. Στο παραπάνω παράδειγμα αυτό σημαίνει ότι η κατάταξη που θα κάνει ο αποφασίζων στο επίπεδο 3 δεν θα πρέπει να επηρεάζει την στάθμιση που θα γίνει στο επίπεδο 2, δηλαδή τις σχετικές προτιμήσεις του για τα κριτήρια. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε το «αξίωμα της εύλογης προσδοκίας» στο Πλαίσιο 1-1.

Τα κριτήρια που έχουν κοινό πρόγονο λέγονται ότι ανήκουν στην ίδια ομάδα. Για παράδειγμα τα {«Κόστος Διαδρομής», «Χρόνος Διαδρομή», «Αξιοπιστία Χρόνου», «Άνεση»} ανήκουν στην ίδια ομάδα και συγκεκριμένα στην ομάδα των κριτηρίων, καθώς έχουν κοινό πρόγονο το «Καλύτερο μέσο να πάω στην δουλειά». Στο 3^{o} επίπεδο έχουμε τέσσερις ομάδες που είναι το σύνολο των εναλλακτικών επιλογών μου για κάθε κριτήριο. Στο επόμενο στάδιο οι συγκρίσεις ανά ζεύγη (διμερείς συγκρίσεις) θα γίνουν αποκλειστικά εντός των ομάδων.

Σε περισσότερα πολύπλοκα προβλήματα μπορεί η δομή να περιλαμβάνει επιπλέον επίπεδα (π.χ. υπό-κριτήρια). Ένα παράδειγμα δίνεται στο Διάγραμμα 1-2. Εδώ βλέπουμε ότι τα κριτήρια έχουν ομαδοποιηθεί σε ομάδες κριτηρίων. Π.χ. τα “Meat Lead Time”, “Inv. Rot. Rate”, “Lead Time”, “Cust. Satis.”, “Market Share” ανήκουν στο κριτήριο “Service Level”. Οι γραμμές μεταξύ του επιπέδου 3 και 4 δηλώνουν ότι τα {Supplier 1, Supplier 2, Supplier 3, Supplier 4) υπάρχουν σε κάθε κόμβο του επιπέδου 3.



Διάγραμμα 1-2, Παράδειγμα πολυ-επίπεδης ιεραρχικής δομής (Hwang, 2005)

1.4.2 Στάδιο 2, οι κατά ζεύγη συγκρίσεις εντός των ομάδων

Η ιδιαιτερότητα της μεθόδου της Αναλυτικής Ιεράρχησης είναι ότι δεν χρησιμοποιεί μία απόλυτη κλίμακα στην οποία τοποθετούνται τα διάφορα στοιχεία του προβλήματος, αλλά ο αποφασίζων, πραγματοποιεί τις διμερείς συγκρίσεις με βάση την «θεμελιώδης κλίμακα» της μεθόδου (Πίνακας 1-4).

Στάθμιση	Ορισμός	Εξήγηση
1	Ιση σημασία	Τα δύο στοιχεία συμβάλλουν εξίσου στο στόχο
3	Ασθενής προτίμηση	Η εμπειρία ή η κρίση ευνοεί ελαφρά το ένα στοιχείο σε σχέση με το άλλο
5	Ισχυρή προτίμηση	Η εμπειρία ή η κρίση ευνοεί καθαρά το ένα στοιχείο σε σχέση με το άλλο
7	Αποδεδειγμένη προτίμηση	Η κυριαρχία του ενός στοιχείου έχει αποδειχθεί στην πράξη
9	Απόλυτη προτίμηση	Έχει αποδειχθεί στον υπερθετικό βαθμό η κυριαρχία του ενός στοιχείου στην επίτευξη του στόχου
2, 4, 6, 8	Ενδιάμεσες τιμές	Αν υπάρχει ανάγκη για υποδιαιρέσεις

Πίνακας 1-4, Η Θεμελιώδης κλίμακα της Αναλυτικής Ιεραρχικής Μεθόδου

Για να γίνει εμφανής η αξία αυτής της προσέγγισης σε σχέση με αυτή της απόλυτης κλίμακας, έστω ότι στο παράδειγμα μας (Παράδειγμα 1-1), για το κριτήριο "Κόστος Διαδρομής" οι εναλλακτικές μου επιλογές παρουσιάζουν την εξής εικόνα :

	min
Πολυκριτήριος Πίνακας Αξιολόγησης	Κόστος / Διαδρομή(€)
Μετρό & Ποδήλατο	2,80
Λεωφορείο & Μετρό	2,80
Ποδήλατο	0,01
Αυτοκίνητο	3
Ταξί	7

Πίνακας 1-5

Εάν η σύγκριση γινόταν χρησιμοποιώντας την απόλυτη κλίμακα "Κόστος σε Διαδρομής ευρώ" : (Η ερώτηση σε κάθε κελί είναι: Πόσο πιο καλή επίδοση έχει η επιλογή της γραμμής από την επιλογή της στήλης για το κριτήριο " Κόστος /΄Διαδρομή" ;), τότε οι διμερείς συγκρίσεις θα λάμβαναν το αποτέλεσμα της διαίρεσης για τα εκάστοτε κόστη, δηλαδή (Πίνακας 1-6):

Συγκρίσεις με βάση την "Απόλυτη Κλίμακα"	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1 2,8/2,8	0,03 0,1/2,8	1,07 3/2,8	2,50 7/2,8
Λεωφορείο&Μετρό		1	0,03 0,1/2,8	1,07 3/2,8	2,50 7/2,8
Ποδήλατο			1	30 3/0,1	70 7/0,1
Αυτοκίνητο				1	2,33 7/3
Ταξί					1
Στα κελιά κάτω από την διαγώνιο, η τιμή είναι η αντίστροφη της σχετικής σύγκρισης					

Πίνακας 1-6

Οι παραπάνω συγκρίσεις, αν και εκ πρώτης όψεως φαίνονται να έχουν νόημα. Π.χ. λογικό είναι ότι αφού η μετακίνηση με το ταξί κοστίζει 7 ευρώ και με το αυτοκίνητο 3 ευρώ, η επίδοση του αυτοκινήτου στο κριτήριο "Κόστος /΄Διαδρομή" θα είναι 7/3=2,33 φορές καλύτερη από του ταξί. Ωστόσο αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει κάποια προβλήματα:

1. Για τους διάφορους αποφασίζοντες η αξία και η σημαντικότητα που δίνουν στο κάθε ευρώ είναι διαφορετική. Αλλιώς θα αποτιμούσε την διαφορά των 4 ευρώ ανά διαδρομή ένας τσιγκούνης Σκωτσέζος και αλλιώς ένας πλούσιος Σαουδάραβας. Αλλιώς θα έβλεπε τα σχεδόν μηδενικά έξοδα του ποδηλάτου ένας φοιτητής που προσπαθούσε να τα φέρει βόλτα όπως - όπως και αλλιώς ο Ωνάσης. Αν και πιθανόν για το παράδειγμα μας οι διμερείς συγκρίσεις με απόλυτη και σχετική κλίμακα να μην δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα, το παραπάνω σκεπτικό αρχίζει και αποκτάει βαρύτητα σε επιχειρηματικές αποφάσεις π.χ. σε μία επένδυση, όπου τα ποσά που διακυβεύονται είναι της τάξης των εκατοντάδων χιλιάδων ευρώ.
2. Υπάρχουν πολλά κριτήρια για τα οποία δεν είναι δυνατόν να υπάρξει "απόλυτη κλίμακα" καθώς αυτό θα σήμαινε ότι θα έπρεπε να υπάρχει μία πανανθρώπινη συμφωνία σε σχέση με την αξία της μονάδας μέτρησης. Π.χ. για το βάρος υπάρχει "απόλυτη κλίμακα" γιατί υπάρχει παγκόσμια

συμφωνία σε σχέση με το τί σημαίνει ένα γραμμάριο. Για την ομορφιά, την άνεση, την ευχαρίστηση κλπ δεν μπορεί να συμβεί κάτι αντίστοιχο.

Για τους δύο παραπάνω λόγους η μέθοδος Αναλυτικής Ιεράρχησης χρησιμοποιεί την «θεμελιώδη κλίμακα» η οποία είναι μία «σχετική κλίμακα» της υποκειμενικής αξίας που προσδίδει ο αποφασίζων στα στοιχεία του προβλήματος. Το γεγονός αυτό δεν πρέπει να παρερμηνευθεί ως μία ενθάρρυνση να αγνοεί ο αποφασίζων τα δεδομένα που υπάρχουν για το πρόβλημα (π.χ. το κόστος της κάθε διαδρομής). Τα δεδομένα θα πρέπει να είναι πάντοτε ο οδηγός του αποφασίζοντα για να πραγματοποιήσει τις δικές του υποκειμενικές κρίσεις.

Προχωρώντας λοιπόν στις διμερείς συγκρίσεις με την χρήση της Θεμελιώδους κλίμακας, για μία ομάδα που έχει n αντικείμενα, ο πίνακας διμερών συγκρίσεων θα περιέχει n^2 κελιά, αλλά επειδή η διαγώνιος θα αποτελείται από μονάδες και τα υπόλοιπα μισά κελιά θα περιέχουν τις αντίστροφες τιμές των υπολοίπων, ο αριθμός των συγκρίσεων που θα πρέπει να γίνουν θα είναι μόλις $\frac{n(n-1)}{2}$.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι στους πίνακες αυτούς υπεισέρχεται μία "φυσιολογική" ασυνέπεια. Η ασυνέπεια αυτή πηγάζει εγγενώς από την ασυνέπεια της κρίσης του αποφασίζοντα. Για περισσότερα σχετικά με την φύση και το νόημα αυτής της ασυνέπειας, ανατρέξτε στο Πλαίσιο 1-2.

Έτσι λοιπόν, έστω ότι για το Παράδειγμα 1-1 θέλουμε να βρούμε τις διμερείς συγκρίσεις, σε σχέση με το κριτήριο του κόστους διαδρομής. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να τεθούν 10 ερωτήσεις της μορφής «Σε σχέση με το κόστος της διαδρομής, πόσο πιο σημαντική είναι η Χ λύση από την Υ;». Ένας εύσχημος τρόπος να παρουσιασθεί το ερωτηματολόγιο αυτό, δίνεται στην Εικόνα 1-1.

Αφού αποφασίσουμε για όλες τις διμερείς συγκρίσεις, θα διατάξουμε τις απαντήσεις σε έναν πίνακα, και έστω ότι αυτός είναι ο εξής:

Πίνακας Διμερών Συγκρίσεων	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	1/5	3	9
Λεωφορείο & Μετρό	1	1	1/5	3	9
Ποδήλατο	5	5	1	3	9
Αυτοκίνητο	1/3	1/3	1/3	1	5
Ταξί	1/9	1/9	1/9	1/5	1

- Οι συγκρίσεις έχουν πραγματοποιηθεί με βάση την "Θεμελιώδη Κλίμακα"
- Στα κελιά με γκρίζο χρώμα, η τιμή θα είναι η αντίστροφη της σχετική σύγκρισης
- Οι τιμές που έχουν δοθεί αφορούν τον συγγραφέα. Ένας σκωτσέζος ή ένας Σαουδάραβας ή ένας φοιτητής που προσπαθεί να τα φέρει βόλτα όπως-όπως, το πιθανότερο είναι ότι θα έδινε άλλες τιμές

Πίνακας 1-7

Με βάση λοιπόν τον πίνακα των διμερών συγκρίσεων θα πρέπει να υπολογιστούν τα σχετικά βάρη των εναλλακτικών επιλογών .Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να υπολογιστούν τα σχετικά βάρη από τον πίνακα των συγκρίσεων, εμείς όμως θα παραθέσουμε την μέθοδο ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος που έχει προταθεί από τον Saaty και την μέθοδο του κανονικοποιημένου μέσου όρου.

Σε σχέση με **το κόστος της διαδρομής**, ποια είναι η προτίμηση σας για τις παρακάτω εναλλακτικές επιλογές μεταφοράς ;

Εναλλακτική Α	**Προτίμηση**	**Εναλλακτική Β**
Μετρό& Ποδήλατο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Λεωφορείο & Μετρό
Μετρό& Ποδήλατο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Ποδήλατο
Μετρό& Ποδήλατο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Αυτοκίνητο
Μετρό& Ποδήλατο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Ταξί
Λεωφορείο & Μετρό	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Ποδήλατο
Λεωφορείο & Μετρό	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Αυτοκίνητο
Λεωφορείο & Μετρό	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Ταξί
Ποδήλατο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Αυτοκίνητο
Ποδήλατο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Ταξί
Αυτοκίνητο	9 7 5 3 1 3 5 7 9	Ταξί

Εικόνα 1-1, Παράδειγμα φύλλου διμερών συγκρίσεων

1.4.2.1 Μέθοδος Ιδιοτιμής-Ιδιοδιανύσματος

Είναι ο πιο ακριβής τρόπος υπολογισμού των βαρών για έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων. Για να γίνει αντιληπτό γιατί με την μέθοδο αυτή προκύπτει η απάντηση στο ζητούμενο εύρεσης βαρών, διαβάστε το Πλαίσιο 1-2.

Έστω λοιπόν ότι ο πίνακας διμερών συγκρίσεων είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου οι τιμές κάτω της διαγωνίου είναι $a_{ij} = {}^{1}/_{a_{ji}}$

Τα βάρη (priority vectors) των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται ο πίνακας προκύπτουν από τον υπολογισμό του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή για τον πίνακα A.

Έστω λοιπόν ότι αυτό το ιδιοδιάνυσμα είναι της μορφής

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

και λ_{max} είναι η ιδιοτιμή η οποία βρίσκεται πιο κοντά στον αριθμό των αντικειμένων (n).

Εάν το ιδιοδιάνυσμα δεν είναι κανονικοποιημένο (να αθροίζουν όλα τα στοιχεία του στην μονάδα), τότε το κανονικοποιούμε.

Θα πρέπει επίσης να υπολογιστεί ο "λόγος συνέπειας" (Consistency Ratio) του πίνακα διμερών συγκρίσεων: $CR = {}^{CI}/_{RI}$

όπου CI είναι ο δείκτης συνέπειας (Consistency Index) και υπολογίζεται $CI = \frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$

ενώ το RI είναι ο "δείκτης τυχαίας συνέπειας" (Random Consistency Index) και έχει υπολογιστεί από τον Saaty ανάλογα με τον αριθμό των αντικειμένων που περιέχει ο πίνακας, ως εξής:

Αριθμός Αντικειμένων (n)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

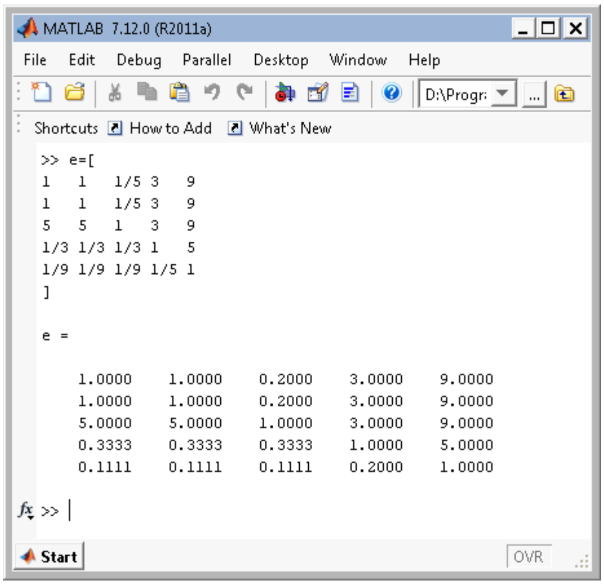
1-8, ΔείκτηςΤυχαίας Συνέπειας

Ο πίνακας αυτός προέκυψε ως εξής: Ο Saaty δημιούργησε επαναληπτικά πίνακες διμερών συγκρίσεων που τα στοιχεία τους είχαν επιλεγεί στην τύχη από τις τιμές της "fundamental scale" (1/9, 1/8, 1/7 .... 1,2 ... 8,9). Ο μέσος δείκτης συνέπειας (CI) αυτών των τυχαίων πινάκων είναι ο "δείκτης τυχαίας συνέπειας" (RI).

Είναι λοιπόν λογικό να θέλουμε ο δείκτης συνέπειας του δικού μας πίνακα να είναι κατά πολύ καλύτερος (μικρότερος) από αυτόν ενός τυχαίου πίνακα. Αυτή την σύγκριση κάνει το CR, και στην πράξη εάν αυτό είναι ίσο η μικρότερο του 0.1, τότε οι εκτιμήσεις μας θεωρούνται εντός των φυσιολογικών ορίων συνέπειας.

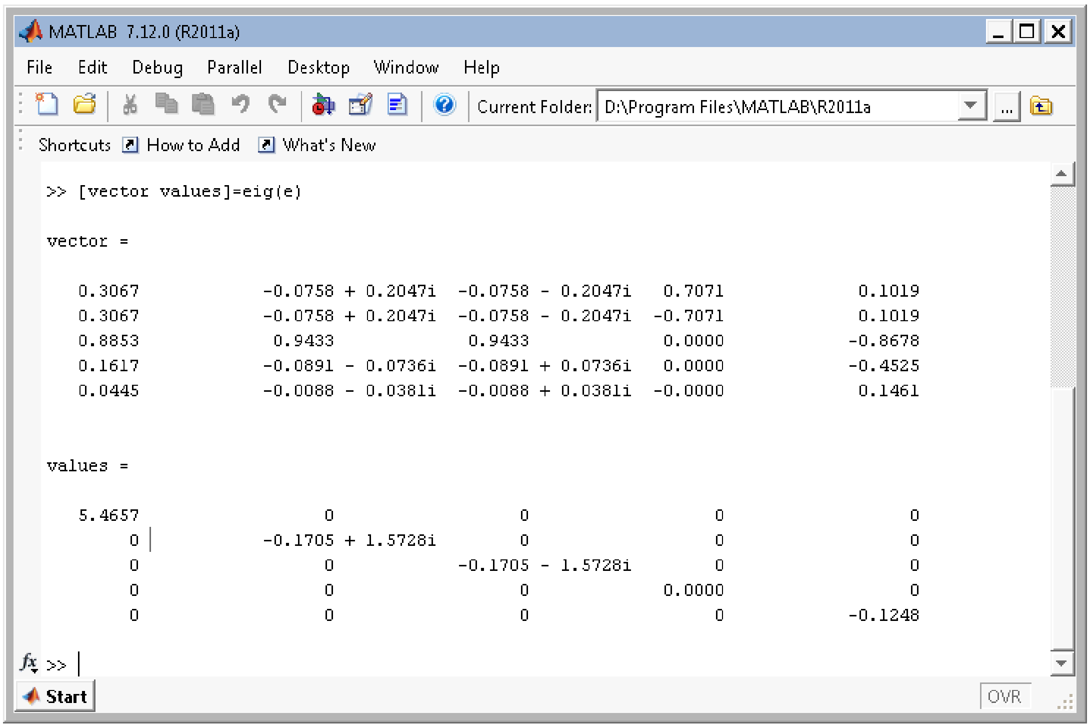
Αμέσως τώρα θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού των βαρών με την μέθοδο της ιδιοτιμής στο λογισμικό MATLAB για τον πίνακα διμερών συγκρίσεων Πίνακας 1-7..

Βήμα 1, Εισάγουμε αρχικά τον πίνακα συγκρίσεων:



Εικόνα 1-2

Βήμα 2, Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την εντολή *eig* για να βρούμε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αυτού.

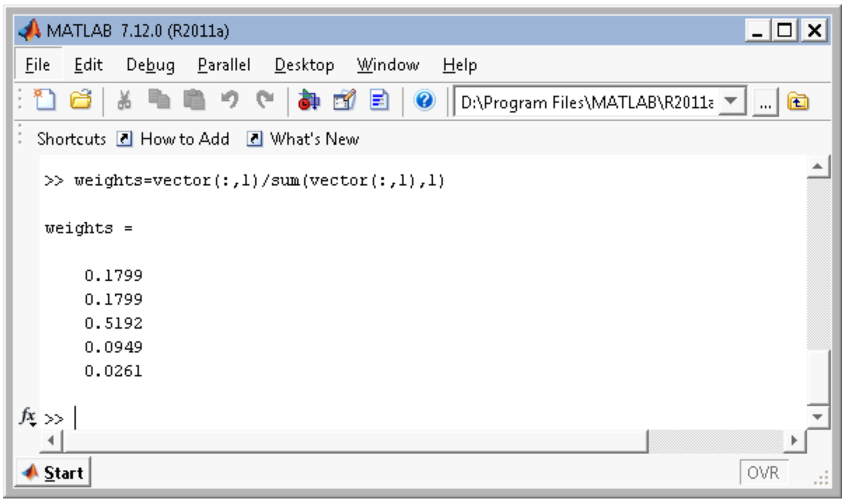


Εικόνα 1-3

Στην Εικόνα 1-3 το λογισμικό μας έχει επιστρέψει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα συγκρίσεων στην μεταβλητή *values*. Η κάθε στήλη περιέχει έναν αριθμό (οι υπόλοιποι είναι μηδενικά) ο οποίος είναι και μία από τις ιδιοτιμές. Θα κρατήσουμε την μεγαλύτερη από τις πραγματικές ιδιοτιμές (για αυτό προκύπτει και ο συμβολισμός λ_{max}). Έτσι στην περίπτωση μας οι ιδιοτιμές των στηλών 2 και 3 φεύγουν γιατί είναι μιγαδικές ενώ από την στήλη 1, 4 και 5 κρατάμε την πρώτη στήλη γιατί είναι η μεγαλύτερη (5,4657 έναντι -0 και -0,1248).

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που μας ενδιαφέρει είναι η πρώτη στήλη του πίνακα *vectors*.

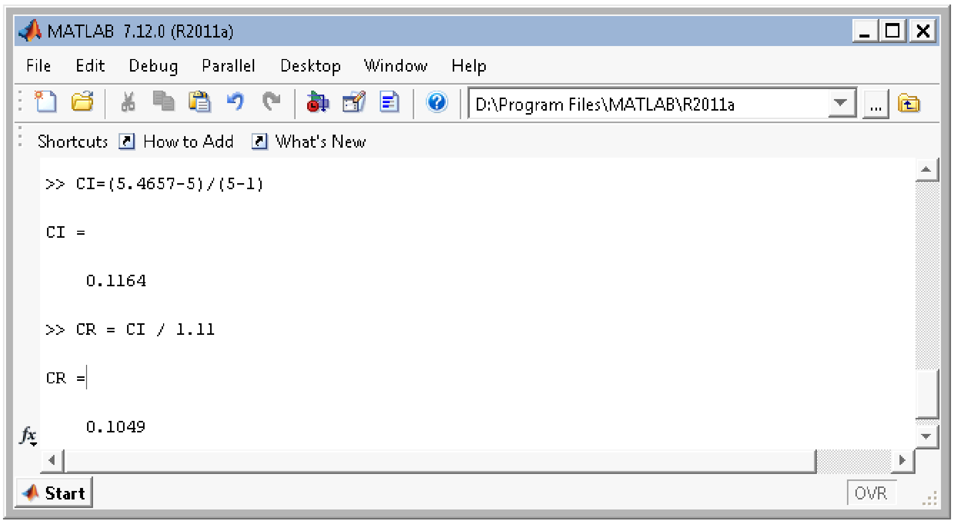
Βήμα 3, Θα κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα αυτό και έτσι θα προκύψουν τα βάρη.



Εικόνα 1-4

Δηλαδή στο κριτήριο "Κόστος Διαδρομής", η πρώτη εναλλακτική (Μετρό&Ποδήλατο) έχει βαρύτητα 17,99%, το ίδιο και η δεύτερη (Λεωφορείο&Μετρό), η 3^{η} (Ποδήλατο) έχει 51,92%, η τέταρτη (Αυτοκίνητο) έχει 9,49% και η τελευταία (Ταξί) έχει 2,61%.

Βήμα 4, Στο σημείο αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τον βαθμό ασυνέπειας της κρίσης μας. Επειδή για το πρόβλημα μας γίνονται 5 διμερείς συγκρίσεις, θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή RI=1,11. Παρατηρούμε ότι CR=0.1049 που είναι σχεδόν ίσο με 0.1 που σημαίνει ότι οι εκτιμήσεις μας έχουν ένα αποδεκτό επίπεδο συνέπειας.



Εικόνα 1-5

1.4.2.2 Μέθοδος κανονικοποιημένου αριθμητικού μέσου όρου

Είναι ένας απλός αλλά προσεγγιστικός τρόπος υπολογισμού των βαρών για έναν πίνακα διμερών συγκρίσεων. Έστω λοιπόν, όπως και πριν, ότι ο πίνακας διμερών συγκρίσεων είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου οι τιμές κάτω της διαγωνίου είναι $a_{ij} = {}^{1}/_{a_{ji}}$

Κανονικοποιούμε τον πίνακα ως προς τις στήλες και στην συνέχεια υπολογίζουμε τον μέσο όρο κάθε γραμμής. Για τον πίνακα διμερών συγκρίσεων του παραδείγματος μας, έχουμε:

Βήμα 1, Κανονικοποίηση ως προς τις στήλες

Πίνακας Διμερών Συγκρίσεων	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1	1	0.2	3	9
Λεωφορείο & Μετρό	1	1	0.2	3	9
Ποδήλατο	5	5	1	3	9
Αυτοκίνητο	0.33	0.33	0.33	1	5
Ταξί	0.11	0.11	0.11	0.2	1
Άθροισμα	7.44	7.44	1.84	10.2	33

Πίνακας Διμερών Συγκρίσεων	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	1/7.44	1/7.44	0.2/1.84	3/10.2	9/33
Λεωφορείο & Μετρό	1/7.44	1/7.44	0.2/1.84	3/10.2	9/33
Ποδήλατο	5/7.44	5/7.44	1/1.84	3/10.2	9/33
Αυτοκίνητο	0.33/7.44	0.33/7.44	0.33/1.84	1/10.2	5/33
Ταξί	0.11/7.44	0.11/7.44	0.11/1.84	0.2/10.2	1/33
Άθροισμα	7.44	7.44	1.84	10.2	33

Πίνακας Διμερών Συγκρίσεων	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί
Μετρό& Ποδήλατο	0.1344	0.1344	0.1087	0.2941	0.2727
Λεωφορείο & Μετρό	0.1344	0.1344	0.1087	0.2941	0.2727
Ποδήλατο	0.6720	0.6720	0.5435	0.2941	0.2727
Αυτοκίνητο	0.0444	0.0444	0.1793	0.0980	0.1515
Ταξί	0.0148	0.0148	0.0598	0.0196	0.0303

Βήμα 2, Μέσος Όρος ανά γραμμή

Πίνακας Διμερών Συγκρίσεων	Μετρό& Ποδήλατο	Λεωφορείο& Μετρό	Ποδήλατο	Αυτοκίνητο	Ταξί	Μ.Ο. ανα γραμμή
Μετρό& Ποδήλατο	0.1344	0.1344	0.1087	0.2941	0.2727	0.1889
Λεωφορείο & Μετρό	0.1344	0.1344	0.1087	0.2941	0.2727	0.1889
Ποδήλατο	0.6720	0.6720	0.5435	0.2941	0.2727	0.4909
Αυτοκίνητο	0.0444	0.0444	0.1793	0.0980	0.1515	0.1035
Ταξί	0.0148	0.0148	0.0598	0.0196	0.0303	0.0279

'Ετσι, τα βάρη στο κριτήριο "Κόστος Διαδρομής" είναι κατά προσέγγιση,, στη πρώτη εναλλακτική (Μετρό&Ποδήλατο) 18.89%, το ίδιο στη δεύτερη (Λεωφορείο&Μετρό), στη 3^{η} (Ποδήλατο) 49.09%, στη τέταρτη (Αυτοκίνητο) 10.35% και στη τελευταία (Ταξί) 2,79%.

Για να υπολογίσουμε τον βαθμό συνέπειας ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Για κάθε γραμμή, υπολογίζουμε το γινόμενο του διανύσματος της γραμμής επί της στήλης του Μ.Ο. και το διαιρούμε με το βάρος της γραμμής αυτής

Για παράδειγμα για την γραμμή 1 (Μετρό&Ποδήλατο) ο βαθμός συνέπειας είναι:

((0.1344 X 0.1889) + (0.1344 X 0.1889) + (0.1087 X 0.4909) + (0.2941 X 0.1035) + (0.2727 X 0.0279)) / 0.1889 =0.7529

Έχουμε δηλαδή

Πίνακας Διμερών Συγκρίσεων	Μέτρο Συνέπειας
Μετρό& Ποδήλατο	0.7529
Λεωφορείο & Μετρό	0.7529
Ποδήλατο	1.1382
Αυτοκίνητο	1.1514
Ταξί	1.3571

Ο μέσος όρος αυτού του πίνακα είναι το CI και για την περίπτωση μας είναι ίσο με ίσο 1.0305.

Έτσι ο δείκτης συνέπειας είναι ίσος με CR=(1.0305/1.11)

Πλαίσιο 1-2

Η παραβολή του επιστήμονα-ναυαγού

Ένας επιστήμονας είχε την ατυχία να ναυαγήσει ολομόναχος κάπου σε κάποια ατόλλη του αρχιπελάγους της Πολυνησίας. Τυχερός μέσα στην ατυχία του, στην ατόλλη αυτή υπήρχε άφθονη τροφή και νερό[4]. «Τι ευτυχία να έχω λύσει το οικονομικό πρόβλημα ! ». Σύντομα όμως η απουσία ενασχόλησης με κάτι επιστημονικό άρχισε να του βαράει στα νεύρα και η κατάσταση έβαινε επιδεινούμενη.

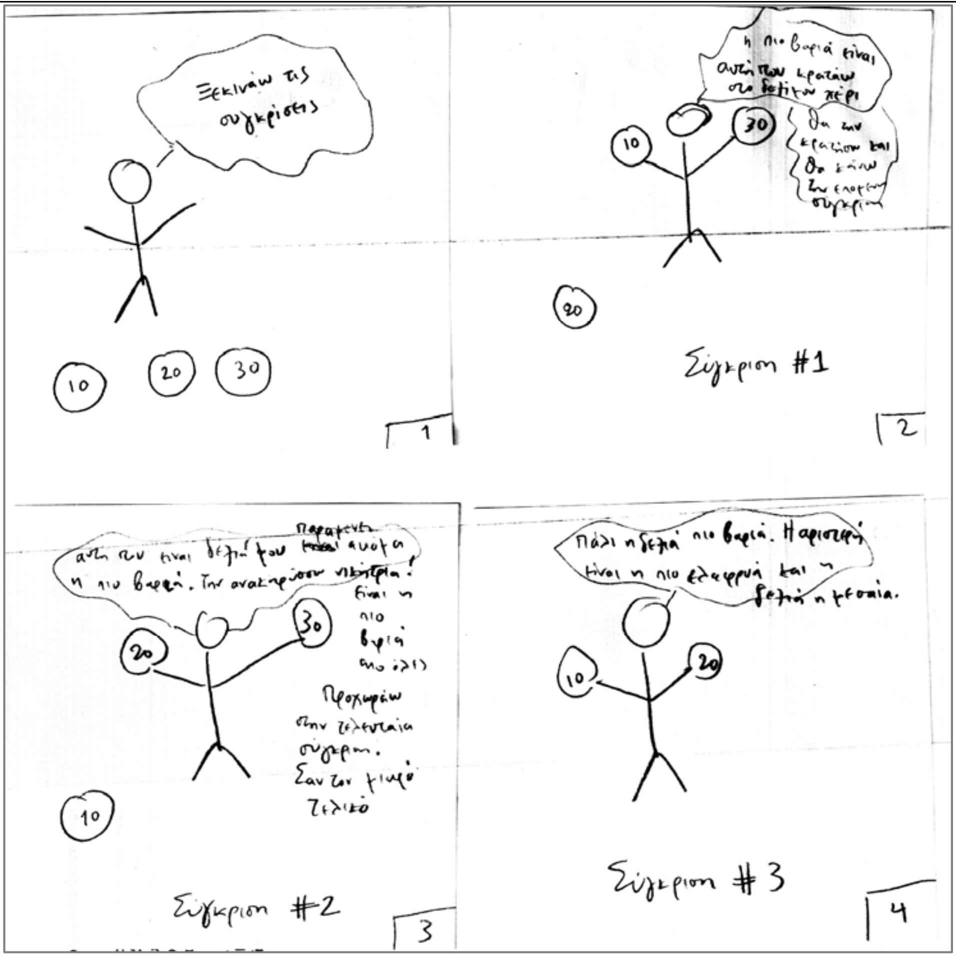
Ώσπου κάποια ηλιόλουστη μέρα, κάνοντας τον γύρο της ατόλλης, έπεσε πάνω σε τρείς ολοστρόγγυλες και αρκετά όμοιες πέτρες. Οι πέτρες αυτές ήταν στημένες στην σειρά από την μικρότερη στην μεγαλύτερη, και αυτό το θεώρησε μάνα εξ ουρανού για τις επιστημονικές του ανησυχίες !

«Αν και σε σχέση με το μέγεθος τους είναι φανερό ποια είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη, θέλω να υπολογίσω ακριβώς τι συμβαίνει με το βάρος τους.».

Αν ο αγαπητός μας επιστήμονας είχε καταφέρει να διασώσει από το ναυάγιο μία ζυγαριά, ως άλλος Ροβινσώνας Κρούσος, το επιστημονικό του ερώτημα θα ήταν τετριμμένο: Θα ζύγιζε τις πέτρες, θα έβρισκε το βάρος της κάθε μίας και θα έκανε πολύ εύκολα την σχετική κατάταξη. Ευτυχώς –για την επιστημονική του ευρωστία- δεν είχε αυτή την δυνατότητα και έπρεπε να στύψει το μυαλό του να βρει κάποιον άλλον τρόπο που θα στηριζόταν μόνο στις αισθήσεις του.

Καταρχήν σκέφτηκε αν υπήρχε ένας συστηματικός τρόπος να διερευνήσει την κατάταξη των λίθων σε σχέση με το βάρος. Δηλαδή ποια ήταν η πιο βαριά, η επόμενη πιο βαριά και ούτω καθεξής. Κατέληξε στον παρακάτω τρόπο:

[4] Επιτρέψτε μου την ανακρίβεια «συγγραφική αδεία», καθότι στις ατόλλες δεν υπάρχει γλυκό νερό.



Αν και η απάντηση στο ερώτημα, αν και τον ικανοποίησε, η περιέργεια του δεν εξαντλήθηκε. Ήθελε να μάθει αν μπορούσε, με επιστημονική μέθοδο, να αποκτήσει περισσότερες πληροφορίες σε σχέση με το βάρος των λίθων.

Την επόμενη μέρα, γεμάτος ενεργητικότητα έφτασε στο αγαπημένο μέρος του με τις πέτρες αποφασισμένος να κάνει βγάλει άκρη: "Θέλω να δώσω ένα νούμερο στην κάθε πέτρα που θα εκφράζει το πόσο βαριά είναι. Το νούμερο αυτό ας μην είναι γραμμάρια, αφού δεν έχω ζυγαριά. Θα είναι ένας καθαρός αριθμός που όμως θα είναι ένας δείκτης του βάρους της κάθε πέτρας."

Αποφάσισε να προσεγγίσει το πρόβλημα αλγεβρικά. Δηλαδή αντί για αριθμούς να χρησιμοποιήσει σύμβολα (π.χ. γράμματα). Αυτό θα του έδινε μεγαλύτερη ευελιξία ώστε να μπορεί να γενικεύσει και να βγάλει κάποια θεωρία που θα ήταν χρήσιμη και σε άλλους. Έτσι τα βάρη-δείκτες τα ονόμασε w_1, w_2, w_3 και στις διμερείς συγκρίσεις έδωσε έναν συμβολισμό της μορφής a_{ij} (δηλαδή η τιμή της σύγκρισης της 1ης με την 2η πέτρα θα συμβολίζονταν ως a_{12}, της 2ης με την 3η a_{23}, και της 1ης με την 3η ως a_{13}). Τα w_1, w_2, w_3 είναι οι άγνωστοι μου, τα ζητούμενα μου ενώ τα a_{ij} είναι εν δυνάμει γνωστοί αριθμοί (αρκεί να κάνω τις συγκρίσεις με τις πέτρες μου).

Αφού λοιπόν, όπως και για την κατάταξη των λίθων , θα έκανε 3 διμερείς συγκρίσεις, θα κατέληγε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$w_1 = a_{12}w_2$$
$$w_1 = a_{13}w_3$$
$$w_2 = a_{23}w_3$$

Έφερε όλους τους αγνώστους στα αριστερά και το σύστημα έγινε

$$w_1 - a_{12}w_2 = 0$$
$$w_1 - a_{13}w_3 = 0$$
$$w_2 - a_{23}w_3 = 0$$

Παρατηρώντας αυτό που είχε γράψει φώναξε δυνατά: Ένα ομογενές σύστημα !! Ομογενές ! Ομογενές ! Τα συστήματα που στο δεξί τους μέρος είναι όλα μηδέν έχουν μελετηθεί από καιρό και ο τρόπος που επιλύονται είναι πασίγνωστος. Έχουν τουλάχιστον μία λύση, την μηδενική. Δηλαδή την

$w_1 = w_2 = w_3 = 0$. Φυσικά την αποκλείω γιατί δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα. Αν ήταν έτσι, οι πέτρες θα έπρεπε να αιωρούνται. Υπάρχει και μία ακόμα περίπτωση, αυτή των άπειρων λύσεων εάν η ορίζουσα τους είναι μηδενική. Άπειρες λύσεις ; Δηλαδή θα υπάρχουν άπειρες τριάδες w_1, w_2, w_3 που θα ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων. Αρκεί λοιπόν για να βρω την λύση να βάλω μία τυχαία τιμή στο w_1 και λύνοντας το υπόλοιπο σύστημα θα βρω τις τιμές στα w_2, w_3. Ας υπολογίσω την ορίζουσα για να δω τελικά ότι η μηδενική λύση δεν είναι η μοναδική.

Για να υπολογίσω την ορίζουσα στο αριστερό μέρος των εξισώσεων θα εμφανίσω όλους τους αγνώστους, κάνοντας ένα κόλπο: Θα βάλω τον συντελεστή μηδέν στον άγνωστο που δεν υπάρχει στην εξίσωση. Έτσι:

$$\begin{matrix} w_1 - a_{12}w_2 = 0 & & w_1 - a_{12}w_2 + 0w_3 = 0 \\ w_1 - a_{13}w_3 = 0 & \Leftrightarrow & w_1 + 0w_2 - a_{13}w_3 = 0 \\ w_2 - a_{23}w_3 = 0 & & 0w_1 + 1w_2 - a_{23}w_3 = 0 \end{matrix}$$

Αυτό σε απεικόνιση πινάκων θα το γράψω ως : $A \cdot w = 0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & 0 \\ 1 & 0 & -a_{13} \\ 0 & 1 & -a_{23} \end{bmatrix} \text{ και } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του Α, είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & 0 \\ 1 & 0 & -a_{13} \\ 0 & 1 & -a_{23} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -a_{13} \\ 1 & -a_{23} \end{vmatrix} - (-a_{12}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a_{13} \\ 0 & -a_{23} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}$$

Για να υπάρχει λοιπόν αυτή η ακόμα μία λύση που ψάχνω θα πρέπει να ισχύει

$$a_{12}a_{23} - a_{13} = 0 \Rightarrow a_{12}a_{23} = a_{13} \Rightarrow \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = 1$$

Τί σημαίνει η παραπάνω σχέση ; Ότι για να υπάρχει λύση στο πρόβλημα μου, πέραν της μηδενικής, οι διμερείς συγκρίσεις μεταξύ τους θα πρέπει να έχουν κάποια σχέση, κάποια συνέπεια. Αυτό επιβεβαιώνει και την πραγματικότητα, όπου το πόσες φορές είναι βαρύτερη η 1η από την 2η πέτρα επί το πόσες φορές θα είναι βαρύτερη η 2η από την 3η θα πρέπει να δίνει ακριβώς το πόσες φορές είναι βαρύτερη η 1η πέτρα από την 3η (για την ακρίβεια θα πρέπει $a_{12}a_{23} = a_{13}$). Για παράδειγμα έστω ότι η 1η πέτρα ήταν τόσο βαριά όσο και η 2η (δηλαδή $\alpha_{12} = 1$) και η 2η 4 φορές βαρύτερη από την 3η, τότε χωρίς καθόλου μαθηματικά, θα περιμέναμε η 1η πέτρα να είναι και αυτή 4 φορές βαρύτερη από την 3η.

Κουρασμένος από την αφηρημένη λογική της άλγεβρας αποφάσισε να κάνει επιτέλους και κάτι πρακτικό και έτσι άρχισε να πραγματοποιεί τις διμερείς συγκρίσεις και να σημειώνει τους σχετικούς αριθμούς.

Σύγκριση 1ης με 2η πέτρα: Η 1η πέτρα ήταν κατά 1/4 βαρύτερη από την 2η πέτρα. Δηλαδή το βάρος της 1ης πέτρας είναι 1 και 1/4 το βάρος της 2ης, δηλαδή $w_1 = 1.25w_2 \rightarrow a_{12} = 1.25$

Σύγκριση 1ης με 3η πέτρα: Η 1η πέτρα ήταν κατά 1/2 βαρύτερη από την 3η πέτρα. Δηλαδή το βάρος της 1ης πέτρας είναι 1 και 1/2 το βάρος της 2ης, δηλαδή $w_1 = 1.5w_3 \rightarrow a_{13} = 1.5$

Σύγκριση 2ης με 3η πέτρα: Η 2η πέτρα ήταν κατά 1/3 βαρύτερη από την 3η πέτρα. Δηλαδή το βάρος της 1ης πέτρας είναι 1 και 1/3 το βάρος της 2ης, δηλαδή $w_2 = 1.33w_3 \rightarrow a_{23} = 1.33$

Από περιέργεια, δοκίμασε να δει εάν η συνθήκη της συνέπειας των μετρήσεων του ικανοποιείται: Θα πρέπει:

$$\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = 1$$

Αντικαθιστώντας:

$$\frac{1.25 \cdot 1.33}{1.5} = 1.108$$

Ούπς ... Κάτι δεν πάει καλά ... Απογοητευμένος παράτησε τα γραπτά του και γύρισε να πάρει έναν υπνάκο.

Το επόμενο πρωί που ξύπνησε, ξεκαθαρίσει μέσα του τί είχε πάει στραβά: "Δεν είμαι ζυγαριά ! Άνθρωπος είμαι ! Η δυνατότητα μου να διακρίνω τα σχετικά βάρη των λίθων είναι πεπερασμένη και έτσι θα πρέπει να θεωρήσω δεδομένο ότι δεν θα υπάρχει πλήρης συνέπεια.

Εάν ήμουν ζυγαριά θα έπρεπε να ισχύει: $w_1 = a_{12}w_2 = a_{23}w_3$

Θα έπρεπε δηλαδή οι συγκρίσεις μεταξύ της πρώτης πέτρας και της δεύτερης και μεταξύ της πρώτης και της τρίτης να έχουν απόλυτη συνέπεια.

Για παράδειγμα: Έστω ότι η 1η πέτρα είναι 4.5 κιλά, η 2η πέτρα είναι 2.3 κιλά και η 3η πέτρα είναι 1.6 κιλό. Δηλαδή έστω ότι γνώριζα ότι $w_1 = 4.5, w_2 = 2.3, w_3 = 1.6$. Αν είχα την ακρίβεια της ζυγαριάς θα έπρεπε να βρω: $a_{12} = \frac{4.5}{2.3} = 1.95, \alpha_{13} = \frac{4.5}{1.6} = 2.81$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $w_1 = 4 = a_{12}w_2 = 1.95 \cdot 2.3 = a_{13}w_3 = 2.81 \cdot 1.6$.

Επειδή όμως είμαι άνθρωπος, και μάλιστα ναυαγός, δεν έχω την ικανότητα για ακριβείς μετρήσεις και έτσι βρίσκω τιμές μη ακριβείς. Π.χ. βρίσκω ότι $a_{12} = 2, \alpha_{13} = 3$ και έτσι $w_1 = 4.5 \neq a_{12}w_2 = 2 \cdot 2.3 = 4.6 \neq a_{13}w_3 = 3 \cdot 1.6 = 4.8$.

Ο επιστήμονας ναυαγός, ικανοποιημένος κάπως από την μικρή πρόοδο που είχε σημειώσει, ξεκουράστηκε όλη την υπόλοιπη μέρα πίνοντας μοχίτο σε μία σκιερή ακτή της ατόλλης.

Την επόμενη ημέρα ανακεφαλαίωσε το πρόβλημα:

«Για να δώσω ένα νούμερο στην κάθε πέτρα που θα εκφράζει το πόσο βαριά είναι, κάνω συγκρίσεις της κάθε πέτρας με τις άλλες. Καταλήγω δηλαδή σε έναν πίνακα συγκρίσεων:»

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Το κάθε στοιχείο δίνει πόσο πιο βαριά νομίζει ο επιστήμονας-ναυαγός ότι είναι μία πέτρα από μία άλλη. Δηλαδή το στοιχείο a_{12} δηλώνει το πόσο πιο βαριά νομίζει ότι είναι η 1η πέτρα από την 2η, το a_{13} *η 2η από την 3η*, κ.οκ. Επίσης ισχύει ότι $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, αφού λογικό είναι να θεωρούμε ότι μία πέτρα είναι τόσο βαριά όσο ο εαυτός της. Επίσης ισχύει ότι $a_{12} = 1/a_{21}, a_{13} = 1/a_{31}, a_{23} = 1/a_{32}$, αφού λογικό είναι να υποθέσουμε ότι το πόσο βαριά είναι η 1η από την 2η είναι το αντίστροφο του πόσο πιο βαριά είναι η 2η από την 1η .

Μετά σκέφτηκε λίγο να παίξει με τον πίνακα των συγκρίσεων. «Αν αναλύσω τον πίνακα των συγκρίσεων στα βάρη τα οποία θέλω να υπολογίσω, τότε έχω»

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 \end{bmatrix}$$

«Ας πολλαπλασιάσω τον A με το διάνυσμα των βαρών»

$$A \cdot \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot w_1 + \frac{w_1}{w_2} \cdot w_2 + \frac{w_1}{w_3} \cdot w_3 \\ \frac{w_2}{w_1} \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + \frac{w_2}{w_3} \cdot w_3 \\ \frac{w_3}{w_1} \cdot w_1 + \frac{w_3}{w_2} \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot w_1 \\ 3 \cdot w_2 \\ 3 \cdot w_3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

«Άρα»

$$A \cdot \vec{w} = 3 \cdot \vec{w}$$

Στην γραμμική άλγεβρα αυτό είναι ένα κλασσικό πρόβλημα εύρεσης ενός ιδιοδιανύσματος με ιδιοτιμή 3. Το πρόβλημα αυτό ωστόσο θα είχε νόημα μόνο αν ο πίνακας ήταν απόλυτα συνεπής. Δηλαδή αν πράγματι ίσχυε ότι

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{bmatrix}$$

«Στην περίπτωση μας, λόγω της αδυναμίας μου να δράσω ως ζυγαριά, το παραπάνω είναι μία προσέγγιση. Έτσι το πρόβλημα μετατοπίζεται στο ακόλουθο:»

$$A \cdot \vec{w} = \lambda_{max} \cdot \vec{w}$$

«Όσο το λ_{max} προσεγγίζει το 3, τόσο πιο συνεπείς θα είναι οι διμερείς συγκρίσεις μου. Έτσι αυτό που θα πρέπει να κάνω είναι να βρω ένα ιδιοδιάνυσμα για την μεγαλύτερη δυνατή ιδιοτιμή του πίνακα συγκρίσεων»

Ο επιστήμονας-ναυαγός μας ήταν πια ικανοποιημένος. Είχε λύσει το μυστήριο της απόδοσης ενός αριθμού σχετικού με το βάρος κάθε πέτρας. Αυτό που δεν ήξερε ήταν ότι είχε ακολουθήσει επακριβώς το σκεπτικό της μεθόδου της Αναλυτικής Ιεράρχησης.

Η εύρεση ενός αριθμού σχετικού με το βάρος κάθε πέτρας είναι ακριβώς αντίστοιχη με την εύρεση ενός αριθμού που θα δηλώνει την βαρύτητα, την σημασία δηλαδή, μίας εναλλακτικής σε σχέση με κάποιο κριτήριο για τον αποφασίζοντα. Η προβληματική της συνέπειας και της ασυνέπειας των διμερών συγκρίσεων ενυπάρχει και σε αυτή την περίπτωση. Μόνο που εδώ δεν υπάρχουν ζυγαριές και είναι αναμενόμενο από τον αποφασίζοντα να επιδεικνύει ασυνέπεια.

«Τουουουουουουουτ». Ο επιστήμονας-ναυαγός μας σήκωσε το κεφάλι του και αντίκρισε ένα πλοίο που έψαχνε για επιζώντες από το ναυάγιο.

1.4.3 Βιβλιογραφία

- Maysum Panju, Iterative Methods for Computing Eigenvalues and Eigenvectors, The Waterloo Mathematics Review, accessed from http://mathreview.uwaterloo.ca/archive/voli/1/panju.pdf
- Introductory Mathematics of the Analytic Hierarchy Process , accessed from http://www.business.pitt.edu/faculty/papers/saaty-into-to-ahp-mathematics.pdf