1 Μαθηματικός Προγραμματισμός

1.1 Εισαγωγικά

Πάρα πολλές φορές στην καθημερινή μας ζωή μας απασχολούν προβλήματα στα οποία αναζητούμε την καλύτερη (άριστη) λύση. Υπάρχει μία σημαντική λεπτομέρεια: Η συντριπτική πλειοψηφία αυτών των προβλημάτων εμπεριέχουν περιορισμούς που αντιμετωπίζουμε καθώς ψάχνουμε την άριστη λύση. Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:

- *Παράδειγμα #1:* Ένας φοιτητής προσπαθεί να καλοπερνάει όσο περισσότερο γίνεται. Υπάρχουν διάφορες δραστηριότητες που μπορεί να κάνει στην διάρκεια της μέρας. Να παίξει τάβλι ή σκάκι με τους φίλους του, να βγει για καφέ, να παρακολουθήσει μαθήματα στο Πανεπιστήμιο, να κοιμηθεί, να μαγειρέψει, να ψωνίσει κλπ. Κάθε μία από αυτές τον ευχαριστεί λιγότερο ή περισσότερο, συμβάλλοντας έτσι με διαφορετικό τρόπο σε αυτό που θεωρεί "καλοπέραση" ή επί το ευγενικότερον "εύ ζήν" (δείτε περισσότερα στο σύνδεσμο ....).. Υπάρχουν ωστόσο κάποιοι σημαντικοί περιορισμοί. Πρέπει να κοιμάται, πρέπει να φροντίζει για το φαγητό του, πρέπει να περνάει τα μαθήματα, δεν έχει απεριόριστα λεφτά. Το πρόβλημα λοιπόν θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής: Πώς θα μεγιστοποιήσει την καλοπέραση του ενώ θα είναι εντός των ορίων που δεν θα του δημιουργηθούν προβλήματα πείνας, αϋπνίας, πτυχίου, αφραγκίας κλπ; Η μεγιστοποίηση δεν είναι πάντα η σωστή κατεύθυνση και όπως έλεγαν και οι αρχαίοι "ουκ εν τω πολλώ το εύ".
- *Παράδειγμα #2*: Ένας φοιτητής αναζητά μία εργασία μερικής απασχόλησης. Θέλει φυσικά να δουλεύει λίγο και να πληρώνεται όσο πιο πολύ. Με άλλα λόγια θέλει όσο πιο καλή δουλειά γίνεται. Ωστόσο υπάρχουν κάποιοι φυσικοί περιορισμοί. Π.χ. δεν θέλει να κάνει μεγάλο ταξίδι για να φτάσει στον τόπο εργασίας, δεν θέλει η δουλειά να είναι περισσότερο από 15 ώρες την εβδομάδα και θα πρέπει να εργάζεται μεταξύ 17.00 και 22.00 (λόγω υποχρέωσης παρακολούθησης εργαστηρίων στο Πανεπιστήμιο). Το πρόβλημα θα μπορούσε να διατυπωθεί: Πώς μπορεί ο φοιτητής να βρει την καλύτερη δυνατή εργασία που να μην όμως υπερβαίνει τα όρια που έχει θέσει ;

Τα παραπάνω είδη προβλημάτων συναντώνται εξίσου συχνά και στον κόσμο των επιχειρήσεων και της οικονομία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα δίνονται παρακάτω:

- *Παράδειγμα #3*, Ένας παραγωγός θέλει να επιλέξει μεταξύ δύο πιθανών καλλιεργειών έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το εισόδημα του. Η γη όμως που έχει στη διάθεση του δεν είναι απεριόριστη. Επίσης ο χρόνος που μπορεί να απασχοληθεί με τις καλλιέργειες του έχει όρια ενώ το ίδιο ισχύει και για το κεφάλαιο κίνησης, δηλαδή τα χρήματα που μπορεί να δώσει για να αγοράσει τις απαραίτητες εισροές (σπόρους, λιπάσματα, καύσιμα). Το πρόβλημα είναι λοιπόν: Πώς θα μεγιστοποιήσει τα έσοδα του ο παραγωγός, υποκείμενος παράλληλα τους περιορισμούς εδάφους, χρόνου και κεφαλαίου κίνησης ;
- *Παράδειγμα #4*, Ένα εργοστάσιο επίπλων θέλει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Παράγει τριών ειδών έπιπλα. Οι ώρες λειτουργίας του είναι συγκεκριμένες. Επίσης για λόγους που έχουν να κάνουν με την φήμη των προϊόντων, θα πρέπει κάθε περίοδο να παράγει μία ελάχιστη ποσότητα από κάθε έπιπλο. Επίσης μπορεί να παραγγείλει συγκεκριμένες ποσότητες από τους προμηθευτές των πρώτων υλών (ξύλα διαφόρων ποιοτήτων), τις οποίες χρειάζεται για να

κατασκευάσει τα έπιπλα του. Το πρόβλημα λοιπόν είναι: Πώς μπορεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του σεβόμενος τους παραπάνω περιορισμούς ;

Σε πολλές περιπτώσεις η λύση των προβλημάτων διευκολύνεται αν διατυπωθεί μαθηματικά. Επιστήμονες διαφόρων κλάδων έχουν επινοήσει τρόπους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Κοινή συνισταμένη όλων αυτών είναι κάποιος αλγόριθμος που θεωρείται κατάλληλος για την επίλυση. Η διαδικασία μαθηματικής διατύπωσης και εξειδίκευσης των προβλημάτων λέγεται Μαθηματικός Προγραμματισμός (ΜΠ).

Ο Μαθηματικός Προγραμματισμός λοιπόν ασχολείται με **προβλήματα αριστοποίησης υπό περιορισμούς σε προβλήματα απόφασης**. Επειδή όπως είπαμε νωρίτερα αυτού του είδους τα προβλήματα συναντώνται σχεδόν παντού, ο μαθηματικός προγραμματισμός είναι ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία των ανθρώπων που ασχολούνται με την διοίκηση επιχειρήσεων και οργανισμών.

Πλαίσιο 1

Τί είναι αριστοποίηση ;

"Αριστοποίηση" (Optimization) = "Άριστο-ποίηση" = "Ποιώ το άριστο" = "Κάνω το τέλειο". Όταν λοιπόν αναζητώ την τέλεια επιλογή, κάνω "αριστοποίηση". Συνήθως το άριστο είναι είτε το μέγιστο είτε το ελάχιστο μίας ποσότητας. Π.χ. η φράση "θέλω να αριστοποιήσω το κέρδος μου" είναι συνώνυμη με το "θέλω να μεγιστοποιήσω το κέρδος μου". Αντίστοιχα για τις φράσεις "θέλω να αριστοποιήσω το κόστος μου" και "θέλω να ελαχιστοποιήσω το κόστος μου".
Όταν επίσης ψάχνω να βρω το ελάχιστο ή το μέγιστο μίας συνάρτησης τότε, σχεδόν πάντα, εκτελώ "αριστοποίηση". Τα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την αριστοποίηση. Από τον Ευκλείδη ήδη (300 π.χ.)οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της εύρεσης ελάχιστου ή μέγιστου. Σε αυτό τον σύνδεσμο μπορείτε να βρείτε μία λίστα με επιστημονικές προσπάθειες που αφορούν την αριστοποίηση. Διαβάστε για παράδειγμα την ιστορία του Johannes Kepler* ο οποίος προσπάθησε να βρει τις άριστες διαστάσεις για τα βαρέλια κρασιού και επίσης προσπάθησε να τελειοποιήσει την διαδικασία εύρεσης συζύγου.

* αστρονόμος (1571-1630), ανακάλυψε ότι η γη και οι πλανήτες γυρνάνε σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο

Πλαίσιο 2

Ο όρος "μαθηματικός προγραμματισμός" δεν προέρχεται από τον "προγραμματισμό υπολογιστών"

Στο πλαίσιο του "μαθηματικού προγραμματισμού", η λέξη "προγραμματισμός" δεν έχει καμία σχέση με αυτό το οποίο συνήθως εννοούμε στην καθομιλουμένη. Δεν πρόκειται δηλαδή για "προγραμματισμό" σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.
Ο όρος καθιερώθηκε στα τέλη του 1940 από τον George Dantzig, αρκετό καιρό δηλαδή πριν η λέξη "προγραμματισμός" (programming) γίνει συνώνυμος με τον "προγραμματισμό ηλεκτρονικού υπολογιστή". Εκείνη την εποχή ο Dantzig μελετούσε ένα πρόβλημα χρονικής κατανομής πόρων για τον στρατό των ΗΠΑ.
Έτσι λοιπόν η λέξη "πρόγραμμα" (program) έχει σχέση με αυτό που λέμε "ωρολόγιο πρόγραμμα μαθημάτων". Μία κατανομή πόρων στον χρόνο.

Ο "μαθηματικός προγραμματισμός" ήταν από τα πρώτα εργαλεία της Επιχειρησιακής Έρευνας. Γεννήθηκε κάπου στο 1940 και μετράει πάνω από μισό αιώνα ζωής. Σε αυτό τον ιστότοπο υπάρχει μία πολύ ωραία ιστορία και προϊστορία του μαθηματικού προγραμματισμού.

Μέχρι σήμερα, πολλές εκατοντάδες χιλιάδες άρθρων έχουν γραφτεί, χιλιάδες βιβλία και άπειρες ώρες μαθημάτων σε όλα τα τμήματα διοίκησης και οικονομίας ανά τον κόσμο. Οι σημειώσεις αυτές φιλοδοξούν να σας πάνε μια μικρή μόνο βόλτα στον κόσμο του μαθηματικού προγραμματισμού με σκοπό: (α) Να αποκτήσετε τις βάσεις ώστε, αν σας χρειαστεί στο μέλλον, να μπορέσετε να εντρυφήσετε βαθύτερα σε κάποιο ειδικό θέμα (β) Να χρησιμοποιείτε τις βασικές αυτές γνώσεις ώστε να μπορείτε να επιλύσετε προβλήματα σε κάποιο σχετικό εργασιακό περιβάλλον.

1.2 Τα δομικά στοιχεία του μαθηματικού προγραμματισμού

Όπως ήδη είπαμε ο μαθηματικός προγραμματισμός ασχολείται με προβλήματα απόφασης στα οποία επιδιώκουμε "αριστοποίηση υπό περιορισμούς". Παρόλο που το φάσμα των προβλημάτων που εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία είναι τεράστια, υπάρχουν τρία σταθερά (δομικά) στοιχεία τα οποία συναντούμε πάντοτε:

(1) Τις μεταβλητές απόφασης,

(2) την αντικειμενική συνάρτηση και

(3) τους περιορισμούς.

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε αυτές τις έννοιες. Αν το καταφέρετε, έχετε "διαβεί τον Ρουβικώνα"[1] του μαθηματικού προγραμματισμού. Η μετάφραση ενός προβλήματος της πραγματικής ζωής σε πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού βασίζεται στον προσδιορισμό των τριών αυτών δομικών στοιχείων. Στα επόμενα πλαίσια τα περιγράφουμε αναλυτικότερα.

Πέραν αυτών των δομικών στοιχείων, κάθε πρόβλημα περιέχει και δεδομένα. Πρόκειται για όλες τις σταθερές (αμετάβλητες) ποσότητες του προβλήματος, οι οποίες συνήθως έχουν να κάνουν με το εξωτερικό περιβάλλον του αποφασίζοντα.

1.2.1 Μεταβλητές Απόφασης

Όταν βρισκόμαστε σε μία κατάσταση όπου δεν μπορούμε να αλλάξουμε τίποτα, στην πραγματικότητα δεν έχουμε πρόβλημα. Αφού δεν μπορούμε να μεταβάλλουμε τίποτα, είμαστε ήσυχοι και εν τέλει δεν προβληματιζόμαστε. Τα πράγματα θα εξελιχθούν μόνα τους.

Αντίθετα όταν σε μία κατάσταση έχουμε την δυνατότητα να μεταβάλλουμε κάποια στοιχεία της, τότε έχουμε πρόβλημα και συγκεκριμένα "πρόβλημα απόφασης". Θα πρέπει να αποφασίσουμε ποια τιμή θέλουμε να δώσουμε σε αυτό που μπορούμε να μεταβάλλουμε.

Στο παράδειγμα #1, ο φοιτητής θα πρέπει να πάρει μία απόφαση: Πόσες ώρες θα αφιερώσει σε κάθε δραστηριότητα (τάβλι, σκάκι, καφέ, πανεπιστήμιο, ύπνο, φαί, διάβασμα) ; Η απόφαση του πηγάζει από το γεγονός ότι μπορεί να μεταβάλλει αυτές τις ώρες που θα αφιερώσει σε κάθε δραστηριότητα. Με άλλα λόγια πρώτα προσδιορίζουμε ποιες από τις μεταβλητές θα παίρνουν κάποια τιμή και στη συνέχεια το επίπεδο αυτής της τιμής.

Με μαθηματικούς όρους οι μεταβλητές απόφασης θα ήταν:

$$X_{σκακι}, X_{τάβλι}, X_{καφές}, X_{ύπνος},\ X_{διάβασμα},\ X_{πανεπιστ}, X_{ψώνια}, X_{μαγείρεμα}$$

Είναι πλέον φανερό ότι σε ένα πρόβλημα απόφασης, οι "μεταβλητές απόφασης" κατέχουν κεντρική θέση. Είναι τα στοιχεία εκείνα για τα οποία καλούμαστε τελικά να αποφασίσουμε. Οι "μεταβλητές

[1] Η φράση "διέβη τον Ρουβίκωνα" αναφέρεται σε ανθρώπους που εν γνώσει τους λαμβάνουν μια ριψοκίνδυνη απόφαση χωρίς επιστροφή, βλέπε Wikipedia

απόφασης" αντιστοιχίζονται συνήθως με "μαθηματικές μεταβλητές", έτσι ώστε τελικά το σύνολο του πραγματικού προβλήματος απόφασης να εκφρασθεί με μαθηματικούς όρους . Στο κεφάλαιο 0 αυτή η αντιστοίχιση γίνεται ξεκάθαρη.

Η λύση του προβλήματος απόφασης έχει άμεση σχέση με τις μεταβλητές απόφασης. Όταν ο αποφασίζων επιλέγει συγκεκριμένες τιμές για τις μεταβλητές αυτές, τότε επιλέγει και μία λύση, όχι απαραίτητα την άριστη. Μία λύση για τον φοιτητή του παραδείγματος μας θα ήταν

$$X_{σκακι} = 2 \qquad X_{τάβλι} = 1 \quad X_{καφές} = 4 \quad X_{διάβασμα} = 0$$

$$X_{πανεπιστ} = 6 \quad X_{ψώνια} = 1 \quad X_{ύπνος} = 9 \quad X_{μαγείρεμα} = 2$$

Πόσο καλή είναι αυτή η λύση ; Για να μπορεί να ξέρει ο φοιτητής μας θα πρέπει να έχει προσδιορίσει την "αντικειμενική συνάρτηση".

1.2.2 Αντικειμενική Συνάρτηση

Όπως έχουμε πει, ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού είναι ένα πρόβλημα αριστοποίησης (υπό περιορισμούς). Τί είναι όμως τελικά το άριστο ; Πώς το μετράμε ; Πώς το ποσοτικοποιούμε ; Η "αντικειμενική συνάρτηση" είναι η απάντηση σε αυτές τις ερωτήσεις.

Έτσι η "αντικειμενική συνάρτηση" είναι μία αποτίμηση της αξίας που έχει για τον αποφασίζοντα μία συγκεκριμένη επιλογή. Και όταν μιλάμε για επιλογή εννοούμε τις τιμές που αποφασίζει να δώσει στις μεταβλητές απόφασης. Μιλώντας με μαθηματικούς όρους, η "αντικειμενική συνάρτηση" είναι μία μαθηματική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης. Δηλαδή η "αντικειμενική συνάρτηση" περιέχει πάντοτε τις μεταβλητές απόφασης.

Για να γίνουμε περισσότερο κατανοητοί θα σας δώσουμε μία αντικειμενική συνάρτηση που θα μπορούσε να έχει ο φοιτητής του παραδείγματος #1.

Μία μορφή θα μπορούσε να είναι:

$$Z = X_{σκακι} + X_{τάβλι} + X_{καφές} + X_{ύπνος} + X_{διάβασμα} + X_{πανεπιστ.} + X_{ψώνια} + X_{μαγείρεμα}$$

Καθώς ο φοιτητής θέλει να μεγιστοποιήσει την καλοπέραση του, η παραπάνω συνάρτηση υπονοεί ότι κάθε ώρα που αφιερώνει σε κάθε μία από τις δραστηριότητες του προσθέτουν και από μία μονάδα καλοπέρασης. Πιθανόν αυτό δεν είναι αυτό που έχει στο μυαλό του ο φοιτητής. Έτσι μία πιο αντικειμενική "αντικειμενική συνάρτηση" θα είχε την εξής μορφή:

$$Z = (0.8 \cdot X_{σκακι}) + (1.2 \cdot X_{τάβλι}) + (2 \cdot X_{καφές}) + (-0.5 \cdot X_{ύπνος}) + (-1.5 \cdot X_{διάβασμα}) + (-0.2 \cdot X_{πανεπιστ.}) + (-0.1 \cdot X_{ψώνια}) + (-2 \cdot X_{μαγείρεμα})$$

Από την παραπάνω συνάρτηση είναι φανερό ότι ο φοιτητής μας απεχθάνεται το διάβασμα, αφού του αφαιρεί 1.5 μονάδα από την καλοπέραση του ενώ του αρέσει πολύ να βγαίνει για καφέ αφού του προσφέρει 2 μονάδες καλοπέρασης. Εδώ η καλοπέραση εκφράζεται με μονάδες χρησιμότητας (π.χ. για το τάβλι ο συντελεστής σημαίνει 1,2 μονάδες χρησιμότητας /ώρα)

Χρησιμοποιώντας αυτή την συνάρτηση, ο φοιτητής μας θα μπορούσε να αρχίζει να βάζει τιμές στα διάφορα X και να έχει έτσι μία εκτίμηση του πόση καλοπέραση του προσφέρει η κάθε λύση. Η κάθε λύση θα είναι μία οκτάδα από ώρες. Μία λύση θα ήταν η [1 1 10 0 0 0 0 0], δηλαδή 1 ώρα σκάκι, 1 ώρα τάβλι, 10 ώρες για καφέ και καμία ώρα από τις άλλες δραστηριότητες. Η καλοπέραση που προσφέρει αυτή η λύση ισούται με

$$Z = (0.8 \cdot 1) + (1.2 \cdot 1) + (2 \cdot 10) + (-0.5 \cdot 0)$$

$$+(-1.5 \cdot 0) + (-0.2 \cdot 0) + (-0.1 \cdot 0) + (-2 \cdot 0) = 22$$

Είναι προφανές ότι μία τέτοια λύση δεν είναι εφικτή. Εφικτή ; Δηλαδή στο πρόβλημα για το οποίο συζητάμε υπάρχουν περιορισμοί. Όπως μας έχει προσδιοριστεί, δεν μπορεί ο φοιτητής να μην κοιμηθεί ή να μην φάει (ασχολία με ψώνια και μαγείρεμα). Στο **Error! Reference source not found.** αναλύουμε διεξοδικότερα την χρήση των Περιορισμών στα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού.

Τέλος ας αναρωτηθούμε αν μας είναι απαραίτητη η "αντικειμενική συνάρτηση". Αν αυτός που λαμβάνει την απόφαση έχει δυσκολία να προσδιορίσει τί είναι άριστο για αυτόν, τότε του είναι μάλλον δύσκολο να αποφασίσει. Αν ο φοιτητής στο παράδειγμα #1, στο **Error! Reference source not found.**, δεν μπορεί να ξέρει αν μία ώρα τάβλι του δίνει μεγαλύτερη ευχαρίστηση από μία ώρα σκάκι, τότε δεν θα μπορέσει ποτέ να πάρει απόφαση πόσες ώρες σκάκι και πόσες τάβλι να παίξει. Δηλαδή δεν θα μπορεί να δώσει τιμές στις μεταβλητές απόφασης, τέτοιες που θα τον φέρουν στην άριστη κατάσταση, γιατί για αυτόν η άριστη κατάσταση δεν είναι κάτι αντικειμενικά προσδιορισμένο.

1.2.3 Περιορισμοί

Η ζωή μας χωρίς περιορισμούς πιθανόν να ήταν μονότονη και βαρετή. Στο παράδειγμα #1, ο φοιτητής μας, χωρίς κανένα περιορισμό θα πέρναγε άπειρες στην κυριολεξία ώρες πίνοντας καφέ. Οι περιορισμοί λοιπόν, κάνουν την ζωή μας και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε λίγο πιο ενδιαφέροντα προσθέτοντας τους ποικιλία. Το ίδιο συμβαίνει και στη σφαίρα της οικονομίας και της διοίκησης. Το σημαντικό είναι να ξέρουμε τον τρόπο να μαθηματικοποιούμε αυτού του περιορισμούς.

Ένας περιορισμός θα περιέχει πάντοτε τουλάχιστον μία μεταβλητή απόφασης. Είναι λογικό, καθώς ο περιορισμός έχει ενδιαφέρον για εμάς μόνο και μόνο γιατί περιορίζει τις αποφάσεις μας.

Θα πρέπει επίσης να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε κάποιους εγγενείς περιορισμούς, που πιθανόν να είναι τόσο αυτονόητοι που δεν θα υπάρχει καν αναφορά σε αυτούς. Στο παράδειγμα με τον φοιτητή μας, τέτοιου είδους περιορισμοί είναι το γεγονός ότι οι ώρες που θα αφιερώσει σε οποιαδήποτε δραστηριότητα θα είναι είτε μηδέν είτε περισσότερες του μηδενός.

Είναι επίσης βοηθητικό να γράφουμε τους περιορισμούς με την εξής μορφή:

$$\{ \text{Αριστερό μέλος} \} \{ \leq \text{ ή } \geq \text{ ή } = \} \{ \text{Δεξί μέλος} \}$$

Στο αριστερό μέλος θα έχουμε όλες τις μεταβλητές απόφασης και στο δεξί μέρος θα είναι η τιμή:

- με την οποία θα πρέπει το αριστερό μέλος να ισούται (περίπτωση =)
- την οποία θα πρέπει το αριστερό μέλος να ξεπεράσει (περίπτωση ≥)
- την οποία δεν θα πρέπει ρο αριστερό μέλος να ξεπεράσει (περίπτωση ≤)

Για παράδειγμα, έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι ώρες αφιερώνει ο φοιτητής μας σε κάποια δραστηριότητα πρέπει να είναι ίσες ή μεγαλύτερες του μηδενός. Αφού οι δραστηριότητες που μπορεί να κάνει είναι οκτώ, έχουμε να αντιμετωπίσουμε οκτώ περιορισμούς:

$$X_{\sigma\kappa\alpha\kappa\iota} \geq 0$$
$$X_{\tau\acute{\alpha}\beta\lambda\iota} \geq 0$$
$$X_{\kappa\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma} \geq 0$$
$$X_{\acute{\upsilon}\pi\nu o\varsigma} \geq 0$$
$$X_{\delta\iota\acute{\alpha}\beta\alpha\sigma\mu\alpha} \geq 0$$
$$X_{\pi\alpha\nu\varepsilon\pi\iota\sigma\tau} \geq 0$$
$$X_{\psi\acute{\omega}\nu\iota\alpha} \geq 0$$
$$X_{\mu\alpha\gamma\varepsilon\acute{\iota}\rho\varepsilon\mu\alpha} \geq 0$$

Ένας άλλο (εγγενής) περιορισμός του παραδείγματος με τον φοιτητή είναι ότι οι ώρες που ξοδεύει σε όλες τις δραστηριότητες θα πρέπει να είναι λιγότερες ή ίσες με τις ώρες ενός εικοσιτετραώρου. Δηλαδή

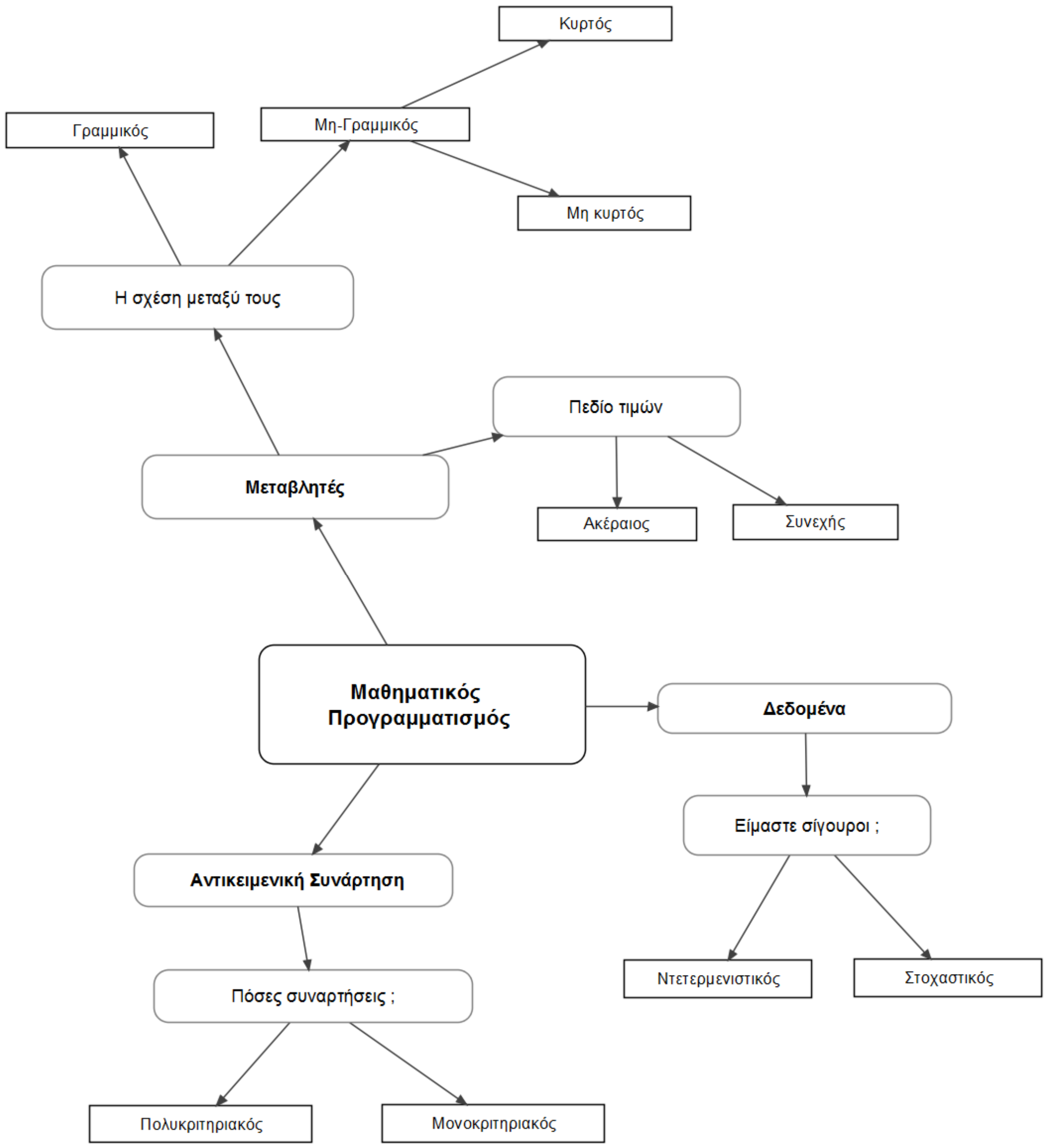
$$X_{\sigma\kappa\alpha\kappa\iota} + X_{\tau\acute{\alpha}\beta\lambda\iota} + X_{\kappa\alpha\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma} + X_{\acute{\upsilon}\pi\nu o\varsigma} + X_{\delta\iota\acute{\alpha}\beta\alpha\sigma\mu\alpha} + X_{\pi\alpha\nu\varepsilon\pi\iota\sigma\tau.} + X_{\psi\acute{\omega}\nu\iota\alpha} + X_{\mu\alpha\gamma\varepsilon\acute{\iota}\rho\varepsilon\mu\alpha} \leq 24$$

Μία σημαντική παρατήρηση είναι η εξής: Αν ο αποφασίζων έχει καταλήξει σε μία λύση, άριστη ή μη, τότε μπορούμε να βρούμε αν αυτή η λύση παραβιάζει κάποιον περιορισμό. Πώς ; Αρκεί να υπολογίσουμε το αριστερό μέρος της εξίσωσης κάθε περιορισμού και να δούμε αν η ανισότητα παραβιάζεται ή όχι.

1.3 Ένας "χάρτης" του μαθηματικού προγραμματισμού

Όπως έχουμε ήδη πει το πεδίου του μαθηματικού προγραμματισμού είναι σχεδόν απέραντο. Είναι χρήσιμη λοιπόν μία χαρτογράφηση του, με βάση τα τρία δομικά του στοιχεία, για να γνωρίζουμε κάθε στιγμή που βρισκόμαστε. Στον χάρτη 1, φαίνονται τα διάφορα είδη μαθηματικού προγραμματισμού.

[ανάλυση των επιμέρους ειδών]



Χάρτης 1, Τα διάφορα είδη Μαθηματικού Προγραμματισμού

Σε αυτές τις σημειώσεις θα ασχοληθούμε με την ειδική –αλλά συχνή- κλάση προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού.

1.4 Ένα απλό πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

Για να γίνει πιο κατανοητή η χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού θα δώσουμε ένα παράδειγμα:

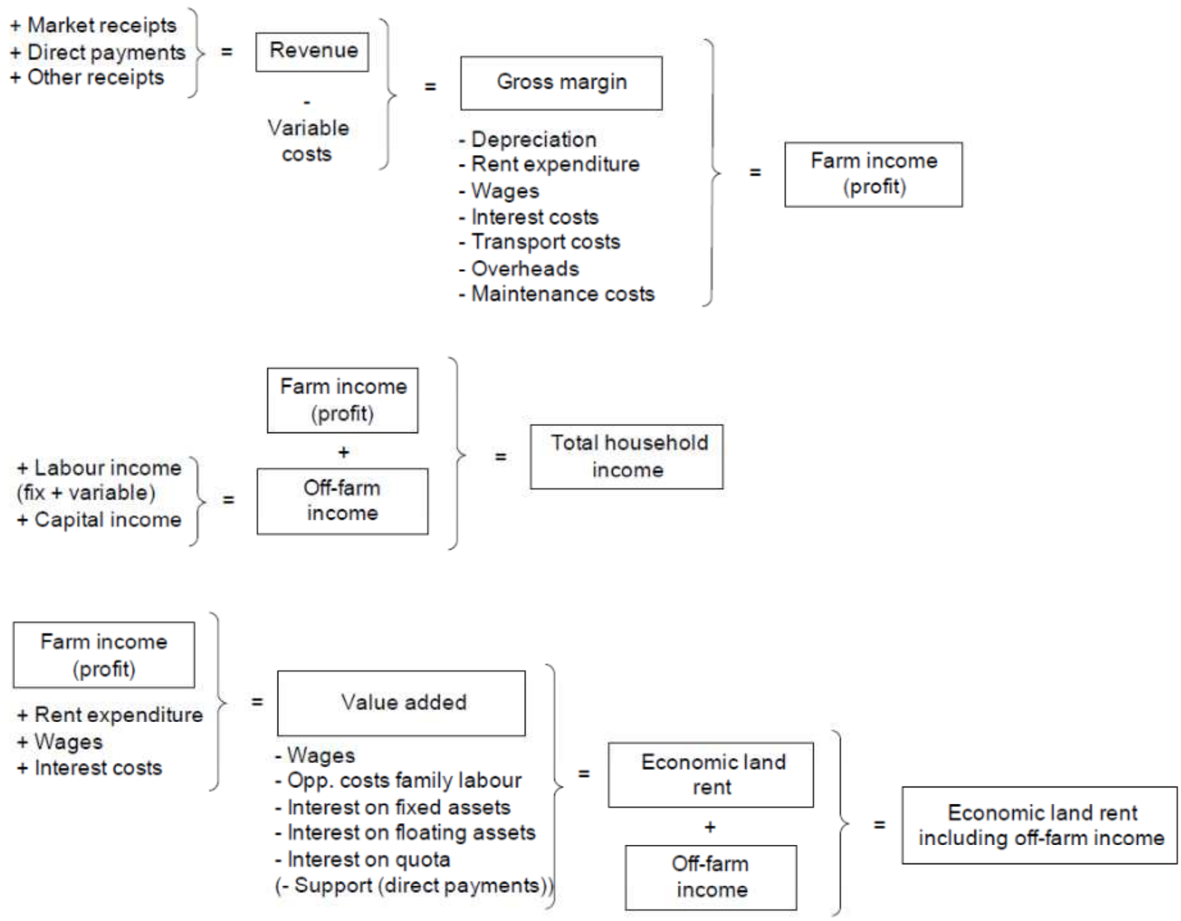
> Ένας παραγωγός έχει στην διάθεση του 30 στρέμματα και μπορεί να καλλιεργήσει Βιομηχανική Ντομάτα ή / και Βαμβάκι. Τελικός του στόχος είναι η μεγιστοποίηση των ακαθάριστων εσόδων του. Προβλέπει ότι από την καλλιέργεια της Βιομηχανικής Ντομάτας, τα ακαθάριστα έσοδα θα είναι 277 €/στρέμμα ενώ για το βαμβάκι 117 €/στρέμμα.. Επίσης γνωρίζει ότι για κάθε στρέμμα Βιομηχανική Ντομάτας απαιτούνται 6,5 ώρες συνολικά δικής του εργασίας ενώ για το βαμβάκι μόνο 2. Συνολικά, για όλα τα στρέμματα που θα καλλιεργήσει δεν μπορεί να αφιερώσει περισσότερες από 600 ώρες. Επίσης. κατά την διάρκεια της καλλιεργητικής περιόδου. για κάθε στρέμμα Βιομηχανικής Ντομάτας απαιτούνται 442 ευρώ κυκλοφοριακού κεφαλαίου ενώ για το Βαμβάκι 120 ευρώ. Έχει στην διάθεση του 5200 ευρώ. Ζητείται να βοηθήσετε τον παραγωγό στο πρόβλημα απόφασης που έχει.

Το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα αριστοποίησης (μεγιστοποίησης) υπό περιορισμούς. Είναι δηλαδή ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού. Απαραίτητο βήμα είναι να εκφράσουμε μαθηματικά τα δομικά του στοιχεία, πράγμα το οποίο αμέσως τώρα θα κάνουμε.

Πλαίσιο 3

Η λογιστική απεικόνιση μίας γεωργικής εκμετάλλευσης, εν συντομία

Figure 6-2: Definition of income indicators and economic land rent



Source: OECD (2003), modified based on MLR (2002).

1.4.1 Μετατροπή σε Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

Μεταβλητές Απόφασης: Για ποιά στοιχεία του προβλήματος καλείται να αποφασίσει ο παραγωγός και μπορεί να τα μεταβάλλει με δική του πρωτοβουλία ; Η καλλιέργεια Βιομηχανικής Ντομάτας ή / και Βαμβακιού. Για την ακρίβεια η απόφαση που πρέπει να λάβει είναι πόσα στρέμματα Βιομηχανικής Ντομάτας και πόσα Βαμβακιού θέλει να καλλιεργήσει. Έτσι ας ονομάσουμε X_N τα στρέμματα Βιομηχανικής Ντομάτας και X_B τα στρέμματα Βαμβακιού τα οποία τελικά θα αποφασίσει να καλλιεργήσει ο παραγωγός.

Αντικειμενική Συνάρτηση: Η Αντικειμενική Συνάρτηση θα πρέπει να εκφράζει το πόσο καλή είναι μία λύση για τον παραγωγό. Καθώς αυτός θέλει να μεγιστοποιήσει τα έσοδα του, η αντικειμενική συνάρτηση ταυτίζεται με την συνάρτηση που εκφράζει τα έσοδα του. Ποια είναι αυτή ; $Z = 277 \cdot X_N + 117 \cdot X_B$

Περιορισμοί: Τα δύο παραπάνω στοιχεία δεν ολοκληρώνουν την έκφραση του προβλήματος με μαθηματικούς όρους. Θα πρέπει κάπως να εκφρασθούν και οι περιορισμοί. Με βάση την εκφώνηση, αυτοί είναι τρείς: Ο περιορισμός της γης (30 στρέμματα στην διάθεση του, όχι περισσότερα), ο περιορισμός της εργασίας (μέχρι 600 ώρες να εργαστεί) και του κυκλοφοριακού κεφαλαίου (μέχρι 5200 ευρώ). Για κάθε περιορισμό θα πρέπει να εκφράσουμε την ανισότητα, η οποία στο αριστερό μέρος θα περιέχει το πώς οι μεταβλητές επηρεάζουν την κατάσταση και στο δεξί την τιμή που δεσμεύει τον παραγωγό. Οι ανισότητες αυτές είναι:

Περιορισμός γης	$X_N + X_B \leq 30$
Περιορισμός εργασίας	$6{,}5 \cdot X_N + 2 \cdot X_B \leq 600$
Περιορισμός κεφαλαίου	$442 \cdot X_N + 120 \cdot X_B \leq 5200$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός εργασίας προκύπτει ως εξής: Για κάθε στρέμμα Βιομηχανικής Ντομάτας ο παραγωγός πρέπει να διαθέσει 6,5 ώρες εργασίας. Για κάθε στρέμμα Βαμβακιού 2 ώρες εργασίας. Ανάλογα λοιπόν με το τί θα καλλιεργήσει (X_N, X_B) θα πρέπει να διαθέσει $6{,}5 \cdot X_N + 2 \cdot X_B$. Από το πρόβλημα γνωρίζουμε ότι η εργασία που θα διαθέσει δεν πρέπει να ξεπερνάει τις 600 ώρες. Άρα καταλήγουμε ότι $6{,}5 \cdot X_N + 2 \cdot X_B \leq 600$.

Θα πρέπει επίσης να μην ξεχάσουμε να προσθέσουμε τον εγγενή και αυτονόητο περιορισμό, ότι οι τιμές των μεταβλητών μας δεν μπορεί να είναι αρνητικές, δηλαδή $\mathrm{X_N} \geq 0$ και $\mathrm{X_B} \geq 0$.

Συγκεντρώνοντας τα δομικά στοιχεία μαθηματικού προγραμματισμού του προβλήματος μας, αυτό πλέον εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Μεγιστοποίησε } \mathrm{Z} = 277 \cdot X_N + 117 \cdot X_B$$

Υπό τους περιορισμούς

$$X_N + X_B \leq 30$$

$$6{,}5 \cdot X_N + 2 \cdot X_B \leq 600$$

$$442 \cdot X_N + 120 \cdot X_B \leq 5200$$

$$X_N \geq 0$$

$$X_B \geq 0$$

Το παραπάνω πρόβλημα θα το επιλύαμε είτε χρησιμοποιώντας τον Solver του Excel είτε σε κάποιο εξειδικευμένο πρόγραμμα για προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού, όπως δείχνουμε στα Παραρτήματα **Error! Reference source not found.** και **Error! Reference source not found.**.

Παρακάτω παρουσιάζουμε μία γραφική απεικόνιση του προβλήματος και έναν σχετικό τρόπο επίλυσης. Ο τρόπος που λειτουργεί ο αλγόριθμος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού έχει άμεση σχέση με την παρακάτω γραφική αναπαράσταση.

Πλαίσιο 4

Οι υποθέσεις του Γραμμικού Προγραμματισμού

Η χρήση του γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να γίνεται έχοντας γνώση των υποθέσεων πάνω στις οποίες βασίζεται. Αυτές οι υποθέσεις είναι οι εξής:

Γραμμικότητα: Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές. Αυτό συνεπάγεται ότι ισχύουν και οι δύο εξής υποθέσεις, η Προσθετικότητα (additivity) και η Αναλογικότητα (Proportionality).

Διαιρετότητα (divisibility): Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές.

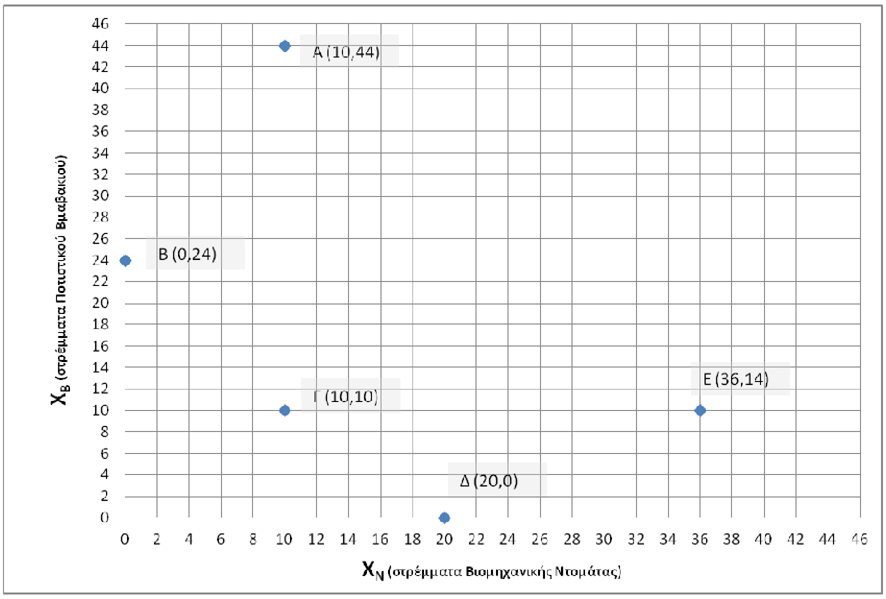
Προσδιοριστικότητα (certainty): όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.

1.4.2 Γραφική Επίλυση

Για να διερευνήσουμε τη γραφική επίλυση του προβλήματος πρέπει να αναπαραστήσουμε διαγραμματικά τα δομικά στοιχεία του προβλήματος (μεταβλητές, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμούς).

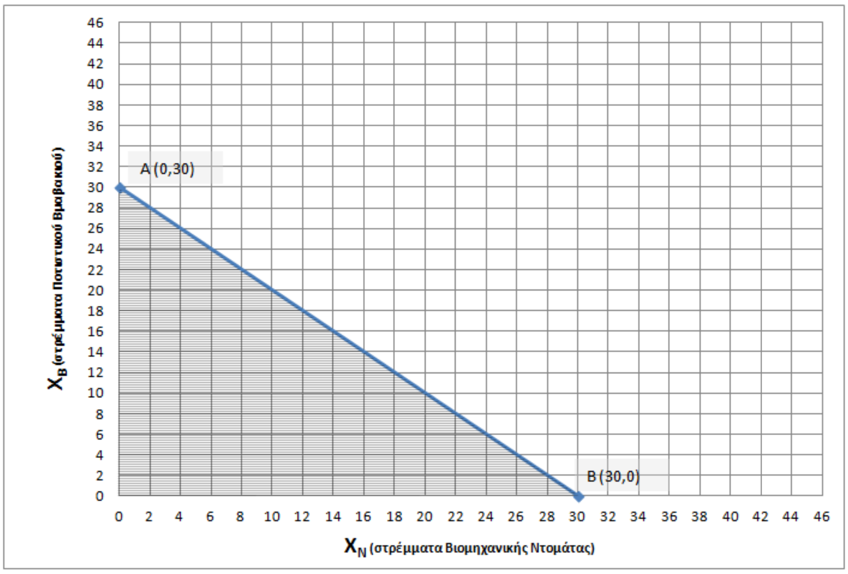
Την κάθε μεταβλητή θα την αναπαραστήσουμε σε έναν καρτεσιανό άξονα. Καθώς έχουμε δύο μεταβλητές, η αναπαράσταση τους σχηματίζει έναν δισδιάστατο χώρο, τον χώρο των αποφάσεων[2]. Κάθε σημείο σε αυτό τον χώρο είναι εκφράζει μία λύση (εφικτή ή μη) του προβλήματος μας, δηλαδή μία απόφαση για τις τιμές των μεταβλητών. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο Διάγραμμα 1. Για παράδειγμα το σημείο Α μας δίνει την απόφαση (λύση) να καλλιεργήσουμε 10 στρέμματα βιομηχανικής ντομάτας και 44 στρέμματα ποτιστικού βαμβακιού.

[2] Αν είχαμε τρείς μεταβλητές θα έπρεπε να έχουμε τρείς άξονες και άρα έναν τρισδιάστατο χώρο. Για τέσσερις και πάνω μεταβλητές (έστω ν στον αριθμό), παρόλο που δεν μπορούμε να κάνουμε οπτική αναπαράσταση, φτιάχνουμε νοητά έναν ν-διάστατο χώρο. Τα εισαγωγικά πανεπιστημιακά μαθήματα γραμμικής άλγεβρας μιλάνε για αυτούς τους «χώρους» , τις ιδιότητες τους και την χρησιμότητα τους. Πολύ καλές διαλέξεις είναι αυτές του καθηγητή Gilbert Strang (MIT, USA) από το φθινόπωρο του 1999.



Διάγραμμα 1, Ο χώρος των αποφάσεων για το παράδειγμα μας

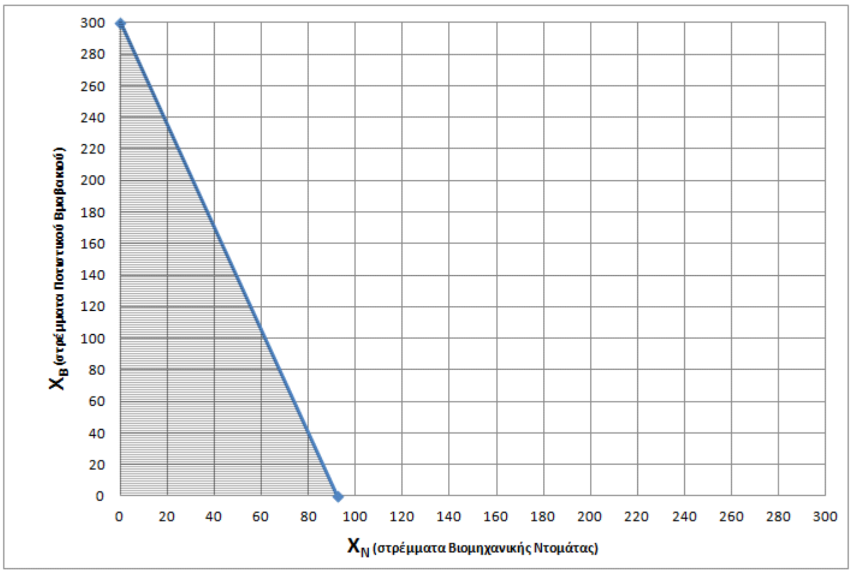
Ο κάθε περιορισμός θα αναπαρασταθεί σαν μία ευθεία. Για παράδειγμα στο Διάγραμμα 2, δίνεται ο περιορισμός της Γής



Διάγραμμα 2, Ο περιορισμός της Γής

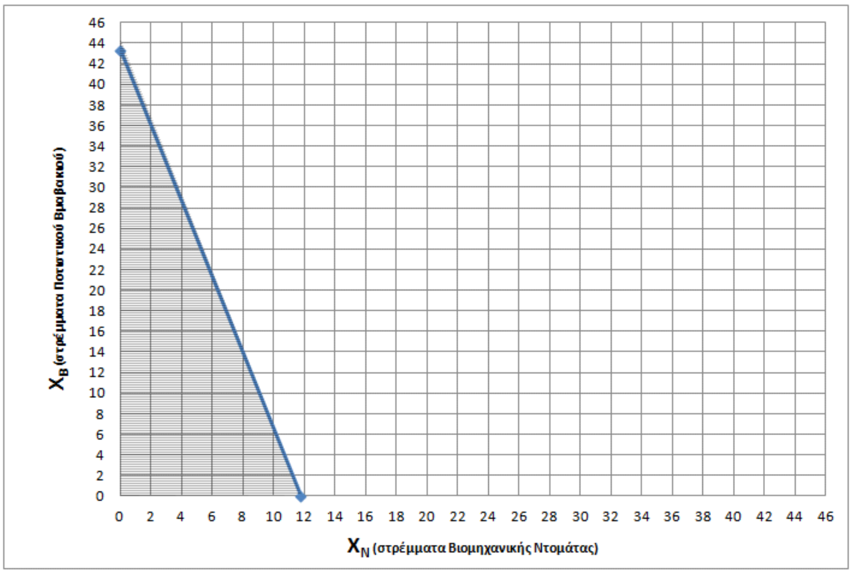
Η ευθεία αυτή περιλαμβάνει όλα τα σημεία στα οποία ισχύει $X_N + X_B = 30$. Τα σημεία που βρίσκονται στην ευθεία και στην γραμμοσκιασμένη περιοχή εκφράζουν όλα τα σημεία που ικανοποιούν τον περιορισμό $X_N + X_B \leq 30$.

Για τον περιορισμό της εργασίας, $6{,}5 \cdot X_N + 2 \cdot X_B \leq 600$, στο διάγραμμα Χ φαίνεται η εφικτή περιοχή



Διάγραμμα 3, Ο περιορισμός της εργασίας

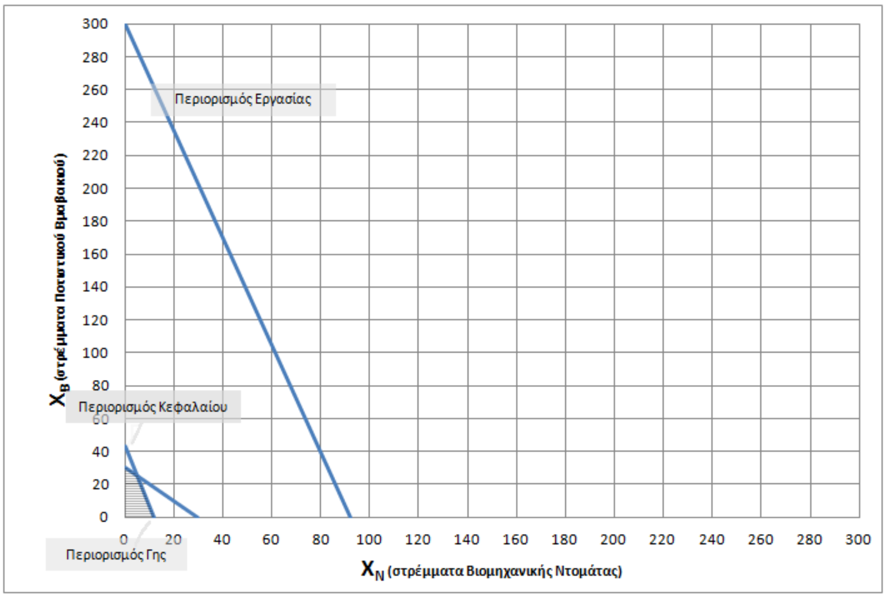
και το ίδιο για τον περιορισμό του κυκλοφοριακού κεφαλαίου, $442 \cdot X_N + 120 \cdot X_B \leq 5200$



Διάγραμμα 4, Ο περιορισμός του κεφαλαίου

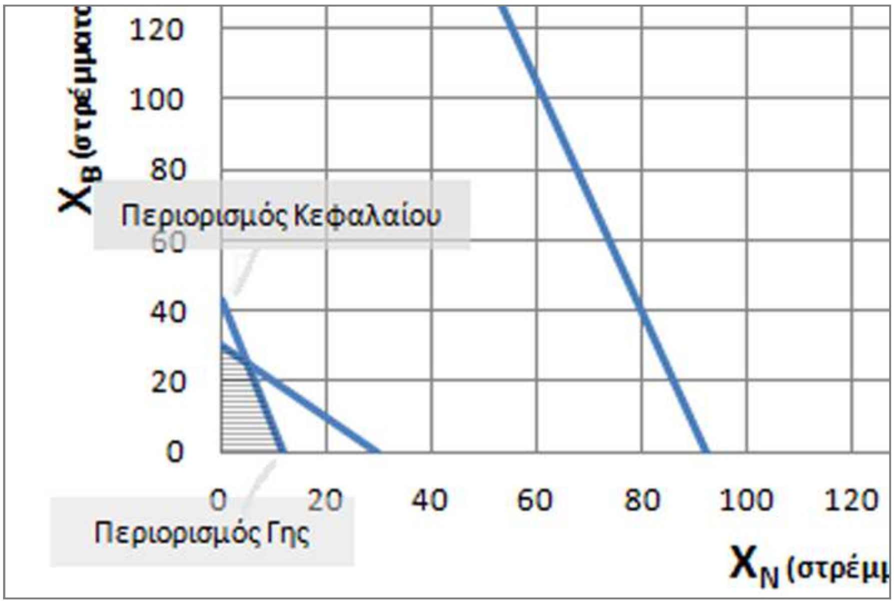
Επίσης θα πρέπει να έχουμε υπόψη και τους δύο εγγενείς περιορισμούς, $X_N \geq 0, X_B \geq 0$ των οποίων η εφικτή περιοχή είναι όλο το δεξιό τεταρτημόριο του καρτεσιανού διαγράμματος.

Η τελική εφικτή περιοχή θα αποτελείται από τα σημεία τα οποία ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς (Διάγραμμα 5). Αν συγχωνεύσουμε τα παραπάνω διαγράμματα, παρατηρούμε ότι υπάρχουν λύσεις που ικανοποιούν έναν περιορισμό, αλλά δεν ικανοποιούν κάποιους άλλους.



Διάγραμμα 5, Η εφικτή περιοχή

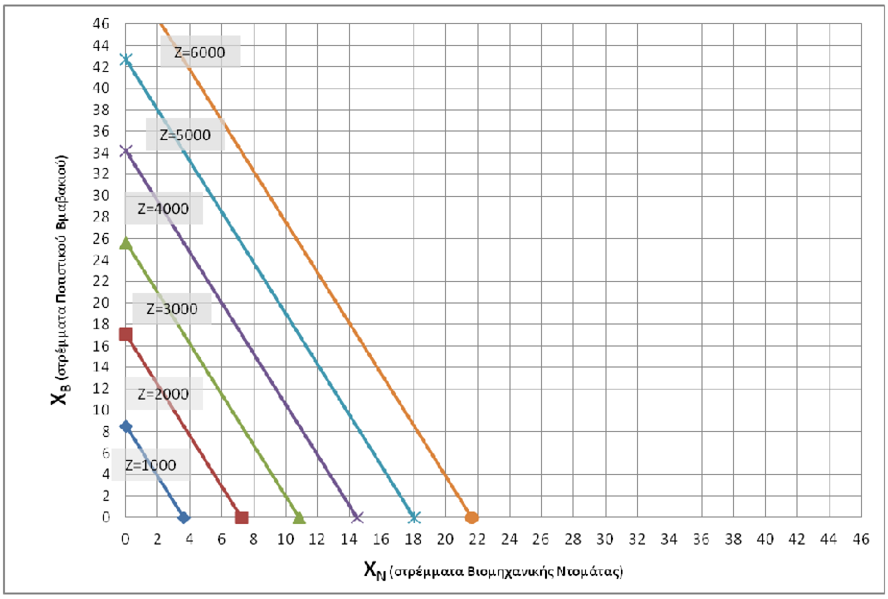
Τελικά οι λύσεις που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς, φαίνονται καλά στο Διάγραμμα 6 (σκιασμένη περιοχή).



Διάγραμμα 6, Λεπτομέρεια της εφικτής περιοχής

Η λύση με την μέγιστη τιμή εισοδήματος θα είναι αυτό το σημείο της εφικτής (γραμμοσκιασμένης) περιοχής στο οποίο έχει την μέγιστη τιμή η συνάρτηση $Z = 277 \cdot X_N + 117 \cdot X_B$.

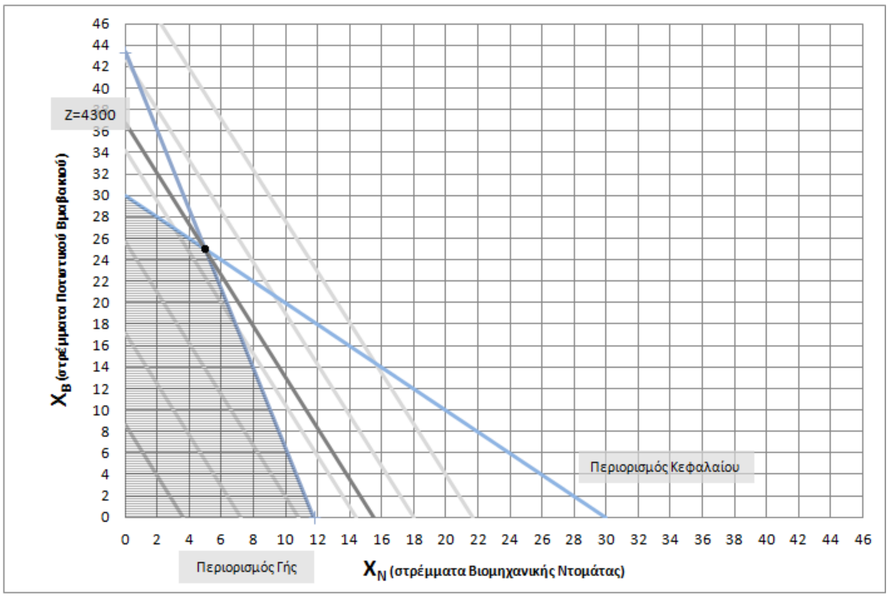
Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τις τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση Z στον χώρο των λύσεων του προβλήματος μας, στο παρακάτω διάγραμμα σχεδιάσαμε μερικές τέτοιες τιμές.



Διάγραμμα 7, Διάφορες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης

Οι ευθείες στο διάγραμμα περιλαμβάνουν όλους τους συνδυασμούς των X_N, X_B οι οποίοι έχουν τις ίδιες τιμές του Ζ. Είναι προφανές ότι η τιμή της Ζ αυξάνει όσο προχωράμε προς τα δεξιά.

Ο συνδυασμός της εφικτής περιοχής και των διαδοχικών τιμών της Ζ θα μας δώσει την άριστη λύση, δηλαδή αυτή που χωρίς να παραβιάζει τους περιορισμούς είναι η μεγαλύτερη δυνατή. Στο επόμενο λοιπόν διάγραμμα απεικονίζονται τα στοιχεία του προβλήματος (αντικειμενική συνάρτηση, περιορισμοί) από τους οποίους προκύπτει –γραφικά- η λύση.



Διάγραμμα 8, Γραφική Επίλυση

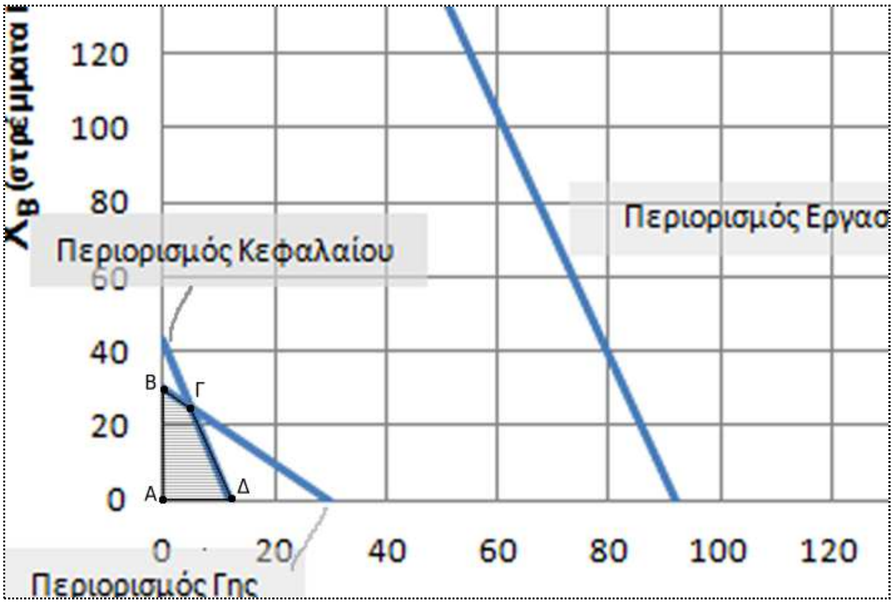
Από το Διάγραμμα 8 παρατηρούμε ότι αυτή βρίσκεται κοντά στο σημείο $(X_B = 25, X_N = 5)$ με την αντικειμενική συνάρτηση να βρίσκεται κοντά στο Ζ=4300. Με άλλα λόγια ο παραγωγός θα πρέπει να καλλιεργήσει 25 περίπου στρέμματα βαμβακιού και 5 στρέμματα από βιομηχανική ντομάτα, αν θέλει να μεγιστοποιήσει το εισόδημα του σεβόμενος τους περιορισμούς που έχουν τεθεί.

Πλαίσιο 5

Μια πιο μαθηματική επεξήγηση της γραφικής επίλυσης

Ο χώρος των αποφάσεων (δηλαδή ο χώρος των δομικών μεταβλητών) είναι το σχέδιο (X_N, X_B) (Διάγραμμα 1).
Για να διερευνήσουμε τη δυνατότητα γραφικής επίλυσης του προβλήματος πρέπει να αναπαραστήσουμε τις μαθηματικές (γραμμικές) σχέσεις του προβλήματος (αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμούς) στο δισδιάστατο χώρο, όπου παίρνουν τιμές οι μεταβλητές.
Πρόκειται για τις γραμμές που οριοθετούν την εφικτή περιοχή (Διάγραμμα 5, Διάγραμμα 6):
(1) Περιορισμός Γης: $\mathrm{X_B} = 30 - \mathrm{X_N}$
(2) Περιορισμός Εργασίας: $\mathrm{X_B} = (600 - 6{,}5 \cdot \mathrm{X_N})/2 = 300 - 3{,}25 \cdot \mathrm{X_N}$
(3) Περιορισμός Κεφαλαίου : $\mathrm{X_B} = (5200 - 442 \cdot \mathrm{X_N})/120 = 43{,}33 - 3{,}68 \cdot \mathrm{X_N}$

Από την γραφική αναπαράσταση του προβλήματος παρουσιάζεται το σύνολο των εφικτών λύσεων (ή εφικτός χώρος) σαν ένα κυρτό πολύεδρο ΑΒΓΔ όπου [Α=(0, 0), Β=(30, 0), Γ=(25.03, 4.96), Δ=(0, 25)], όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 9.



Διάγραμμα 9, Το πολύεδρο της εφικτής περιοχής

Πιο αναλυτικά, οι κορυφές του πολυγώνου της εφικτής περιοχής παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Κορυφή Πολυγώνου	Α	Β	Γ	Δ
Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	0	3510	4302,43	3257,52
Τιμή X_N	0	0	4,96	11,76
Τιμή X_B	0	30	25,03	0
Καλλιεργούμενη γη	0	30	29,99	11,76
Απασχολούμενη εργασία	0	60	82,3	76,44
Κυκλοφοριακό κεφάλαιο	0	3600	5200	5197,92

Αρκεί να βρεθεί συνεπώς , μεταξύ εκείνων των σημείων που αποτελούν μέλη αυτού του συνόλου, εκείνο το σημείο που οι συντεταγμένες του (X_N, X_B) να μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση Ζ. Οι γραμμές που εκφράζουν την αντικειμενική συνάρτηση όταν το Ζ λαμβάνει διάφορες τιμές είναι ευθείες γραμμές παράλληλες μεταξύ τους με κλίση $277/117 = 2.36$ (Διάγραμμα 7).
Χαράζοντας αυτές τις ευθείες για διάφορες τιμές της Ζ, δηλαδή μετατοπίζοντας (δεξιά και

πάνω) την αντικειμενική συνάρτηση, διαπιστώνουμε ότι λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή στο (Z = € 4302,43) δηλαδή την κορυφή Γ του κυρτού πολύεδρου με συντεταγμένες (4.96, 25.03), δηλ. $X_N = 4{,}96$ και $X_B = 11{,}76$, που είναι και η άριστη λύση διότι μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
Έχει αποδειχτεί ότι η άριστη λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι πάντα μια γωνία του κυρτού πολυγώνου που ορίζεται από τους περιορισμούς του προβλήματος, η δε άριστη αυτή γωνία προκύπτει από την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης. Καθώς στην περίπτωση μας στο κυρτό πολύεδρο συμμετέχουν μόνο οι περιορισμοί της γης και του κεφαλαίου, ο περιορισμός της εργασίας δεν επηρεάζει την άριστη λύση και δεν τον εξετάζουμε.

Περιορισμός	Κλίση
Γης	-1
Κεφαλαίου	-442/120 = -3,68

Για τη γενική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης $\mathrm{Z} = c_N \cdot X_N + c_B \cdot X_B$ η άριστη γωνία ορίζεται ανάλογα με την τιμή της κλίσης c_N/c_B.

αν c_N/c_B < 1 τότε η άριστη γωνία είναι η (0, 30) (κορυφή Β)
αν $1 < c_N/c_B$ < 3,68 τότε άριστη γωνία είναι η (4.96,25.03) (κορυφή Γ)
αν $c_N/c_B > 1$ τότε άριστη γωνία είναι η (11.76, 0) (κορυφή Δ)

Στην περίπτωση μας η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης έχει απόλυτη τιμή 2.36, επομένως η άριστη γωνία ορίζεται στην κορυφή Γ.
Είναι δυνατό να υπάρχουν πολλαπλές άριστες λύσεις σε πρόβλημα ΓΠ, όταν η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης συμπίπτει με την κλίση κάποιου περιορισμού – ακμής του εφικτού πολυγώνου. Τότε όλα τα σημεία της ακμής συμπεριλαμβανομένων και των άκρων δίνουν την ίδια τιμή στο Z η οποία είναι μέγιστη. Αυτή θα ήταν η περίπτωση είτε αν η αντικειμενική συνάρτηση είχε κλίση 1 όπου οι άριστες λύσεις θα ήταν όλα τα σημεία της ευθείας ΒΓ είτε αν η κλίση ήταν 3,68 όπου τα σημεία της ευθείας ΓΔ θα ήταν όλα "άριστες λύσεις".

1.5 Ένα πιο ρεαλιστικό πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού

Στην πραγματικότητα σπάνια ένας παραγωγός έχει να επιλέξει μεταξύ δύο μόνο καλλιεργειών. Ας πάρουμε λοιπόν την πιο ρεαλιστική περίπτωση όπου ο παραγωγός μας έχει να επιλέξει μεταξύ 13 καλλιεργειών. Το πρόβλημα έχει ως εξής:

> Ένας παραγωγός έχει στην διάθεση του 30 στρέμματα και μπορεί να καλλιεργήσει μία ή περισσότερες από τις 13 καλλιέργειες του πίνακα 2-1. Τελικός του στόχος είναι η μεγιστοποίηση των ακαθάριστων εσόδων του. Προβλέπει ότι από την καλλιέργεια της Ντομάτας, τα ακαθάριστα έσοδα, ανάλογα με την καλλιέργεια θα είναι όπως στην γραμμή «Έσοδα» του πίνακα 2-2. Επίσης για κάθε καλλιέργεια θα πρέπει να αφιερώνει κάποιες ώρες ανά στρέμμα (βλέπε γραμμή «Εργασία», πίνακας 2-2) και να αναλώνει κάποιο κυκλοφοριακό κεφάλαιο (βλέπε γραμμή «Κεφάλαιο», πίνακας 2-2). Γνωρίζει ότι δεν μπορεί να αφιερώσει περισσότερες από 600 ώρες και περισσότερα από 5200 ευρώ για το σύνολο των καλλιεργειών του. Ζητείται να βοηθήσετε τον παραγωγό στο πρόβλημα απόφασης που έχει.

Καλλιέργεια	Συντομογραφία
Βιομηχανική Ντομάτα	Ν
Σιτάρι Σκληρό Ποτιστικό	Σπ
Σιτάρι Σκληρό Ξηρικό	Σξ
Σιτάρι Μαλακό	ΣΜ
Κριθάρι	ΚΡ
Βρώμη	ΒΡ
Καλαμπόκι	ΚΑ
Μηδική Ποτιστική	Μπ
Μηδική Ξηρική	Μξ
Βιομηχανική Πιπεριά	Π
Καπνός	ΚΠ
Βαμβάκι Ξηρικό	Βξ
Βαμβάκι Ποτιστικό	Βπ

Πίνακας 1-1, Δυνητικές καλλιέργειες για το παράδειγμα

Μεταβλητές	X_N	$X_{\Sigma\pi}$	$X_{\Sigma\xi}$	$X_{\Sigma M}$	X_{KP}	X_{BP}	X_{KA}	$X_{M\pi}$	$X_{M\xi}$	X_{Π}	$X_{K\Pi}$	$X_{B\pi}$	$X_{B\xi}$
Έσοδα (€/στρ.)	277	37	30	23	9	17	60	105	15	326	389	52	117
Εργασία (ώρες/στρ.)	6,5	1,3	1,1	1,1	1,1	1,1	1,7	5,5	5,3	150	90	1,9	2
Κεφάλαιο (€/στρ.)	442	62	52	44	44	44	126	115	95	543	499	97	119
* Οι τιμές έχουν δοθεί από τον μεταπτυχιακό φοιτητή Σταμάτη Μάντζιαρη και αφορούν το έτος 2011 (περιοχή Καρδίτσας)													

Πίνακας 1-2, Δεδομένα προβλήματος

1.5.1 Μια πρώτη προσέγγιση

Παρόλο που ο αριθμός των καλλιεργειών αυξήθηκε σημαντικά, η δομή του προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού έτσι όπως το έχουμε ήδη εκφράσει στο προηγούμενο παράδειγμα δεν επηρεάζεται. Αντί για δύο μεταβλητές θα έχουμε δεκατρείς. Επίσης για κάθε καλλιέργεια θα έχουμε τα αντίστοιχα έσοδα ανά στρέμμα, τις απαιτήσεις σε εργασία και το απαιτούμενο κυκλοφοριακό κεφάλαιο ανά στρέμμα.

Αυτό που αλλάζει είναι ότι η έκφραση του προβλήματος αρχίζει και γίνεται εκτενέστερη. Έτσι το πρόβλημα εκφράζεται ως εξής:

$$\text{Μεγιστοποίησε } Z = 277 \cdot X_N + 37 \cdot X_{\Sigma\pi} + 30 \cdot X_{\Sigma\xi} + 23 \cdot X_{\Sigma M} + 9 \cdot X_{KP} + 17 \cdot X_{BP} + 60 \cdot X_{KA} + 105 \cdot X_{M\pi} + 15 \cdot X_{M\xi} + 326 \cdot X_{\Pi} + 389 \cdot X_{K\Pi} + 52 \cdot X_{B\pi} + 117 \cdot X_{B\xi}$$

Υπό τους περιορισμούς

$$X_N + X_{\Sigma\pi} + X_{\Sigma\xi} + X_{\Sigma M} + X_{KP} + X_{BP} + X_{KA} + X_{M\pi} + X_{M\xi} + X_{\Pi} + X_{K\Pi} + X_{B\pi} + X_{B\xi} \leq 30$$

$$6{,}5 \cdot X_N + 1{,}3 \cdot X_{\Sigma\pi} + 1{,}1 \cdot X_{\Sigma\xi} + 1{,}1 \cdot X_{\Sigma M} + 1{,}1 \cdot X_{KP} + 1{,}1 \cdot X_{BP} + 1{,}7 \cdot X_{KA} + 5{,}5 \cdot X_{M\pi} + 5{,}3 \cdot X_{M\xi} + 150 \cdot X_{\Pi} + 90 \cdot X_{K\Pi} + 1{,}9 \cdot X_{B\pi} + 2 \cdot X_{B\xi} \leq 600$$

$$442 \cdot X_N + 62 \cdot X_{\Sigma\pi} + 52 \cdot X_{\Sigma\xi} + 44 \cdot X_{\Sigma M} + 44 \cdot X_{KP} + 44 \cdot X_{BP} + 126 \cdot X_{KA} + 115 \cdot X_{M\pi} + 95 \cdot X_{M\xi} + 543 \cdot X_{\Pi} + 499 \cdot X_{K\Pi} + 97 \cdot X_{B\pi} + 119 \cdot X_{B\xi} \leq 5200$$

$$X_N, X_{\Sigma\pi}, X_{\Sigma\xi}, X_{\Sigma M}, X_{KP}, X_{BP}, X_{KA}, X_{M\pi}, X_{M\xi}, X_{\Pi}, X_{K\Pi}, X_{B\pi}, X_{B\xi} \geq 0$$

Είναι φανερό ότι θα πρέπει να βρούμε κάποιον καλύτερο τρόπο να αναπαριστούμε τα προβλήματα μας, γιατί συνήθως τα προβλήματα έχουν τουλάχιστον δεκάδες μεταβλητών. Η λύση έρχεται διαμέσου της αλγεβρικής αναπαράστασης.

1.5.2 Αλγεβρική Αναπαράσταση

Θα ορίσουμε το σύνολο των καλλιεργειών ως

$$c = \{N, \Sigma\pi, \Sigma\xi, \Sigma M, KP, BP, KA, M\pi, M\xi, \Pi, K\Pi, B\xi, B\pi\}$$

Έτσι φτιάχνουμε ένα διάνυσμα με τα ακαθάριστα έσοδα, την απαιτούμενη εργασία και το απαιτούμενο κυκλοφοριακό κεφάλαιο ανά καλλιέργεια, ενώ το ίδιο κάνουμε για τις μεταβλητές απόφασης

$$GM_c = \begin{bmatrix} 277 \\ 37 \\ 30 \\ 23 \\ 9 \\ 17 \\ 60 \\ 105 \\ 15 \\ 326 \\ 389 \\ 52 \\ 117 \end{bmatrix} \quad LAB_c = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 1.3 \\ 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \\ 1.7 \\ 5.5 \\ 5.3 \\ 150 \\ 90 \\ 1.9 \\ 2 \end{bmatrix} \quad CAP_c = \begin{bmatrix} 442 \\ 62 \\ 52 \\ 44 \\ 44 \\ 44 \\ 126 \\ 115 \\ 95 \\ 543 \\ 499 \\ 97 \\ 119 \end{bmatrix} \quad X_c = \begin{bmatrix} X_N \\ X_{\Sigma\pi} \\ X_{\Sigma\xi} \\ X_{\Sigma M} \\ X_{KP} \\ X_{BP} \\ X_{KA} \\ X_{M\pi} \\ X_{M\xi} \\ X_{\Pi} \\ X_{K\Pi} \\ X_{B\pi} \\ X_{B\xi} \end{bmatrix}$$

Έτσι αν θέλουμε τα ακαθάριστα έσοδα του Ξηρικού Σκληρού Σιταριού, αρκεί να αναφερθούμε στο στοιχείο $GM_{\Sigma\xi}$, κλπ. Επίσης αν θέλουμε να αναφερθούμε στην τιμή της μεταβλητής απόφασης για το καλαμπόκι αναφερόμαστε στην X_{KA}.

Με βάση την παραπάνω αναπαράσταση, το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού του παραδείγματος μπορεί να γραφτεί ως:

$$\text{Μεγιστοποίησε } \mathrm{Z} = \textstyle\sum_c (GM_c \cdot X_c)$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\sum_c X_c \leq 30$$

$$\sum_c (LAB_c \cdot X_c) \leq 600$$

$$\sum_c (CAP_c \cdot X_c) \leq 5200$$

$$X_c \geq 0 \ \forall \ c$$

1.6 Τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού: Μια μαθηματική προσέγγιση

Θεμελιώδες θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού: στην περίπτωση άριστης λύσης θα υπάρχουν ακριβώς τόσα προϊόντα με θετικό επίπεδο παραγωγής όσοι και οι συντελεστές παραγωγής που χρησιμοποιούνται πλήρως (γραφική απόδειξη με ένα ή δύο περιορισμούς).

Η πρόταση αυτή εξηγείται ως εξής: αν υπάρχει μόνο ένας συντελεστής σε περιορισμένη ποσότητα τότε το πιο λογικό είναι να παράξουμε ένα μόνο προϊόν, εκείνο που αξιοποιεί καλύτερα τον συγκεκριμένο συντελεστή. Αν ένας ακόμη συντελεστής διατίθεται σε περιορισμένη ποσότητα για την επιχείρηση τότε θα είναι προσοδοφόρο να προσθέσουμε στην παραγωγή ένα ακόμα προϊόν, και συγκεκριμένα εκείνο που αξιοποιεί καλύτερα το δεύτερο συντελεστή κτλ

Οι μεταβλητές άεργου δυναμικού

Γ γη που δεν καλλιεργείται

Ε μη χρησιμοποιηθείσα εργασία

Κ κυκλοφοριακό κεφάλαιο που δεν χρησιμοποιείται

Αν εισάγουμε στο πρόβλημα μας ως μεταβλητή την άεργη δυναμικότητα κάθε παραγωγικού συντελεστή τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε το πρόβλημα με τη μορφή ισοτήτων. Οι μεταβλητές άεργης δυναμικότητας θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν διαδικασίες παραγωγής ενδιαφέρουσες οικονομικά που να απασχολούν πλήρως τον αντίστοιχο συντελεστή σε άλλη επιχείρηση. Οι τιμές τους στο επίπεδο της άριστης λύσης (που δίνουν τη δυναμικότητα του παραγωγικού συντελεστή που δε χρησιμοποιείται) ενδιαφέρουν τον αναλυτή γιατί υποδεικνύουν τους συντελεστές που είναι σε σπανιότητα (όταν είναι μηδέν) ή την ποσότητα άεργης δυναμικότητας όταν λαμβάνουν θετική τιμή.

<u>Διατύπωση των περιορισμών του προβλήματος σε μορφή ισοτήτων</u>

$$X_A + X_B + \Gamma = 60 \quad (4)$$

$$25\,X_A + 70\,X_B + E = 2000 \quad (5)$$

$$2.5\,X_A + 12\,X_B + K = 300 \quad (6)$$

όπου οι παραγόμενες ποσότητες και οι άεργες δυναμικότητες δεν μπορεί να είναι αρνητικές.

Με τις πρόσθετες μεταβλητές έχουμε ένα σύστημα με τρείς ανεξάρτητες εξισώσεις και πέντε αγνώστους. Απο τη Γραμμική Αλγεβρα γνωρίζουμε ότι αυτό το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν σε σημεία τα οποία ευρίσκονται στο εσωτερικό ή την περίμετρο του πολυγώνου της εφικτής περιοχής. Τα εσωτερικά σημεία αντιστοιχούν σε θετικές τιμές των δομικών καθώς και των μεταβλητών αέργου δυναμικότητας. Οπως παρατηρήθηκε παραπάνω τα σημεία που ενδιαφέρουν στην περίπτωση μεγιστοποίησης είναι τα γωνιακά, διότι εκεί θα αναζητηθεί η άριστη λύση. Οπως φαίνεται και στον πίνακα 3, τα γωνιακά σημεία έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: ορίζονται με δύο από τις πέντε μεταβλητές ίσες με το μηδέν και τις υπόλοιπες τρείς θετικές.

Τιμές βασικών και μη βασικών μεταβλητών στις κορυφές του εφικτού πολυγώνου

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	*0*	*200*	*280*	*333.4*	*300*
X_A	**0**	**0**	**24**	**48.9**	**60**
X_B	**0**	**25**	**20**	**11.1**	**0**
Μη Καλλιεργούμενη γη	60	35	16	0	0
Αεργη εργατική δύναμη	2000	250	0	0	500
Αεργο κυκλοφοριακό κεφάλαιο	300	0	0	44.466	150

Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε ότι η κάθε γωνία της εφικτής περιοχής που ορίζεται από σύστημα με *m* περιορισμούς και *n* μεταβλητές ορίζεται το πολύ από *m* θετικές μεταβλητές και τουλάχιστον *n- m* μεταβλητές ίσες με μηδέν. Η πρόταση αυτή εκφράζεται με οικονομικούς όρους στο θεώρημα του ΓΠ. *Θεμελιώδες θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού (επαναδιατύπωση):* Υπάρχει πάντα μια άριστη λύση στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στο οποίο ο συνολικός αριθμός των μη αρνητικών μεταβλητών (κανονικών και άεργης δυναμικότητας) είναι ακριβώς ίδιος με τον αριθμό περιορισμών διαθέσιμων πόρων (περιορισμοί υπό μορφή εξισώσεων στο γραμμικό πρόβλημα).

Οι μεταβλητές που τίθενται ίσες με μηδέν ονομάζονται μη βασικές. Οι υπόλοιπες *m* οι (θετικές) τιμές των οποίων προκύπτουν από τη λύση του συστήματος ονομάζονται βασικές με την έννοια ότι η ύπαρξη της εξαρτάται από την παρουσία των τριών γραμμικώς ανεξαρτήτων συντελεστών-διανυσμάτων, τα οποία ορίζουν μια βάση για ένα χώρο *m* διαστάσεων[3].

Οπως έχουμε αναφέρει, οταν το σύνολο των εφαρμοζομένων λύσεων ενός γραμμικού προβλήματος είναι ένα κυρτό πολύεδρο, η άριστη λύση θα είναι μία κορυφή του πολύεδρου. Συνεπώς για να την προσδιορίσουμε, εξετάζουμε μόνο τις κορυφές του πολύεδρου. Επειδή υπάρχει ταυτότητα μεταξύ των εννοιών κορυφή και βασική εφικτή λύση, για να φτάσουμε στο άριστο (optimum) αρκεί να μελετήσουμε τις βασικές εφικτές λύσεις.

Ακολουθώντας τους παραπάνω κανόνες, τροποποιούμε το πρόβλημα έτσι ώστε όλες οι κανονικές μεταβλητές να βρεθούν στο δεξιό σκέλος των ισοτήτων

Αρχική βασική εφικτή λύση

$\Gamma = 60 - X_A - X_B$ (7)

$E = 2000 - 25 X_A - 70 X_B$ (8)

$K = 300 - 2.5 X_A - 12 X_B$ (9)

[3] A.C. Chiang, 2001. Μαθηματικές Μέθοδοι Οικονομικής Ανάλυσης, κεφ. 19-20, εκδ. Κριτική.

Οταν το πρόβλημα γραφτεί σε μορφή ισοτήτων μπορούμε να βρούμε εύκολα μια βασική λύση, να επιβεβαιώσουμε οτι αυτή η λύση είναι εφικτή και να ελέγξουμε άν είναι άριστη. Συγκεκριμένα, αν θεσουμε τις κανονικές μεταβλητές ίσες με μηδέν τότε οι μεταβλητές άεργης δυναμικότητας παίρνουν τιμές ίσες με τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των συντελεστών παραγωγής. Πρόκειται για τη λύση που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων που αναμφίβολα δεν είναι η ιδανική διότι σημαίνει ότι δεν παράγουμε τίποτε, που είναι όμως *βασική λύση* (αριθμός μη αρνητικών μεταβλητών ίσος με τον αριθμό των περιορισμών) και, το κυριότερο, είναι εύκολο να εντοπιστεί και να χρησιμοποιηθεί ως σημείο εκκίνησης για τη διαδικασία υπολογισμών.

Ελεγχος εφικτότητας: Η βασική λύση που προτάθηκε είναι εφικτή αν και μόνο αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι μη αρνητικοί. Παρατηρούμε ότι έτσι όπως έχουμε διατυπώσει το πρόβλημα οι μεταβλητές που βρίσκονται στο δεξιό μέλος παίρνουν την τιμή μηδέν ενώ εκείνες του αριστερού μέλους είναι θετικές. Αυτή η μορφή μας επιτρέπει να δούμε εύκολα ότι μια λύση είναι εφικτή όταν οι σταθεροί όροι δεν είναι αρνητικοί.

Αυτή η βασική αρχική βασική λύση ναι μεν σέβεται όλους τους περιορισμούς αλλά δίνει συνολικό ακαθάριστο κέρδος ίσο με μηδέν. Ειναι λογικό επομένως να αναζητηθεί κάποια άλλη βασική λύση που θα δίνει μεγαλύτερο ακαθάριστο κέρδος. Η επόμενη βασική λύση πρέπει να αναζητηθεί προς την κατεύθυνση του μέγιστου δυνατού κέρδους με την προυπόθεση ότι θα είναι εφικτή. Για να περάσουμε από την αρχική λύση σε κάποια άλλη πρέπει να δώσουμε θετική τιμή σε κάποια μεταβλητή (από αυτές που αυξάνουν την αντικειμενική συνάρτηση) όσο το δυνατόν μεγαλύτερη με την προϋπόθεση να σέβεται όλους τους περιορισμούς και ταυτόχρονα να δώσουμε τιμή μηδέν σε κάποια (προηγουμένως) βασική μεταβλητή. Στην περίπτωση μας επιλέγουμε να γίνει θετική η X_B (καλλιέργεια βαμβακιού) η οποία έχει το μεγαλύτερο συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση μεταξύ των μη βασικών μεταβλητών. Η μέγιστη θετική τιμή που θα της δώσουμε προσδιορίζεται από τον περιορισμό που ενεργοποιείται πρώτος σε ότι αφορά την καλλιέργεια «βαμβάκι», όταν εκείνη είναι η μοναδική καλλιέργεια στην εκμετάλλευση. Αν διαιρέσουμε τη διαθέσιμη ποσότητα για τους τρείς συντελεστές παραγωγής με τον τεχνικό συντελεστή που αφορά το βαμβάκι, θα δούμε ότι το κυκλοφοριακό κεφάλαιο εξαντλείται πρώτο (χρήση όλης της διαθέσιμης ποσότητας του συντελεστή γη μας επιτρέπει να καλλιεργήσουμε 60 στρέμματα με βαμβάκι, εξάντληση της διαθέσιμης εργασίας επιτρέπει την καλλιέργεια 28.6 στρεμμάτων με βαμβάκι, ενώ το διαθέσιμο κυκλοφοριακό επιτρέπει την καλλιέργεια μόνο 25 στρεμμάτων). Επομένως θα καλλιεργήσουμε βαμβάκι (νέα μεταβλητή με θετική τιμή) χρησιμοποιώντας όλο το κυκλοφοριακό κεφάλαιο. Με μαθηματικούς όρους θα πρέπει να μεταφέρω το X_B στο αριστερό μέλος των σχέσεων 7-9 και το K στο δεξιό. Κατά συνέπεια η αρχική βασική λύση που δίνεται από τις σχέσεις 7-9, διαμορφώνεται δια αντικαταστάσεων ως εξής :

Από την ισότητα (9) $\Rightarrow \quad x_B = \frac{300}{12} - \frac{K}{12} - \frac{2.5}{12} x_A$

Αντικαθιστώ στις 7 και 8 και έχω βασική λύση με μεταβλητές τη γη, την εργασία και την καλλιέργεια βαμβακιού :

$$\Gamma = \left(60 - \frac{300}{12}\right) + \frac{1}{12}\cdot \mathrm{K} - \left(1 - \frac{2.5}{12}\right)x_A$$
$$\mathrm{E} = \left(2000 - 70\cdot\frac{300}{12}\right) + \frac{70}{12}\mathrm{K} - \left(2.5 - 70\cdot\frac{2.5}{12}\right)x_A$$
$$x_B = \frac{300}{12} - \frac{1}{12}\cdot \mathrm{K} - \frac{2.5}{12}\cdot x_A$$

Υπολογίζουμε την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης που δίνει αυτή η λύση (*Γ*=35, *Ε*=250, X_B=25) η οποία είναι ίση με 200 δηλαδή μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Παρατηρούμε ότι μεταξύ των μη βασικών μεταβλητών υπάρχει ακόμα μία που έχει θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση, που σημαίνει ότι αν της έδινα θετική τιμή, θα είχα μεγαλύτερο κέρδος.

Αν υποθέσουμε ότι ύστερα απο διαδοχικές αντικαταστάσεις έχουμε φτάσει σε ένα σημείο όπου όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αρνητικοί (σε σχέση με τις μεταβλητές που βρίσκονται στο δεξιό σκέλος) τότε καμμία νέα αντικατάσταση δεν μπορεί να αυξήσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (σε πρόβλημα μεγιστοποίησης) προφανώς έχουμε φτάσει στην άριστη λύση, στην προκειμένη περίπτωση εκείνη που μεγιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η οικονομική εξήγηση της πρότασης αυτής είναι ότι άν το οριακό όφελος από την παραγωγή πρόσθετης μονάδας κάποιου προϊόντος (έννοια συντελεστών στην αντικειμενική συνάρτηση) γίνει αρνητικό δεν παράγουμε άλλο από αυτό το προϊόν. Ετσι προκύπτει ο κανόνας : μια βασική λύση είναι άριστη αν και μόνο αν κανένας απο τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι θετικός.

Είναι απαραίτητο να συστηματοποιήσω και να κωδικοποιήσω την παραπάνω διαδικασία (σε μορφή αλγόριθμου) για να συντομέψω την πορεία επιλογής βασικών λύσεων ώστε να φτάσω το γρηγορότερο στην άριστη λύση, εκείνη δηλαδή που μου δίνει τη μέγιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Η συστηματική παρουσίαση της διαδικασίας είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την χρήση υπολογιστή. Η μέθοδος simplex (**simpl**e compl**ex**) που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό βασίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα και περιγράφεται σε γενικές γραμμές ως εξής :

- Βρίσκουμε μια οποιαδήποτε βασική λύση (γωνία του πολυέδρου). Επειδή αυτό δεν είναι πάντα εύκολο συνήθως επιλέγουμε την αρχή των αξόνων
- Υπολογίζουμε το κέρδος (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) στο σημείο αυτό και τα γειτονικά του
- Αν κάποιο από τα γειτονικά σημεία αποδίδει μεγαλύτερα κέρδη από το σημείο Ο μετακινούμαστε σε αυτό. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία και με διαδοχικούς αποκλεισμούς καταλήγουμε στην άριστη λύση. Το πιο δύσκολο μέρος είναι ο εντοπισμός των γειτονικών σημείων.

Η επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος με την μέθοδο simplex παρουσιάζεται με τη μορφή διαδοχικών πινάκων, που ονομάζονται πίνακες simplex. Ο πρώτος πίνακας (πίνακας 5) παρουσιάζει τα στοιχεία που συνθέτουν το πρόβλημα (περιορισμοί που τίθενται από την αρχή με τον μορφή ισοτήτων και η αντικειμενική συνάρτηση), όπως παρουσιάζονται σε γενική μορφή στον πίνακα 4, όπου :

μεταβλητή $P_j = \begin{cases} j \in \{1,\ldots,\ m\} = B \\ j \in \{m+1,\ldots,\ n\} = NB \end{cases}$

$B=\{1, \ldots, m\}$:διάνυσμα στην βάση – βασική μεταβλητή

$NB=\{m+1, \ldots, n\}$:διάνυσμα εκτός βάσης – μή βασική μεταβλητή

c_j, $j \in \{m+1, \ldots, n\}$:συντελεστές του x_j στην αντικειμενική συνάρτηση (οικονομικοί συντελεστές)

a_i, $i \in \{1, \ldots, m\} = B$: ανεξάρτητος όρος του i περιορισμού (τιμή της μεταβλητής στην εξεταζόμενη βασική λύση)

a_{ij}, $i \in \{1, \ldots, m\} = B$: συντελεστής (ή τεχνικός συντελεστής) της μεταβλητής j στον περιορισμό i

Zj, $j \in \{1, \ldots, n\}$: $Zj = \sum_{i \in B} c_i a_{ij}$

Zo : $Z_o = \sum_{i \in B} c_i a_i$

Η πρώτη στήλη περιέχει τους οικονομικούς συντελεστές που συνδέονται με τις μεταβλητές στην βάση (βλέπε και στην δεύτερη στήλη).

Η δεύτερη στήλη περιέχει τον ονομαστικό κατάλογο των διανυσμάτων στην βάση (στο εξεταζόμενο επίπεδο, δηλαδή στον 1ο, 2ο κ.λ.π. πίνακα simplex (το διάνυσμα αυτό περιλαμβάνει τις βασικές μεταβλητές).

Η τρίτη στήλη περιέχει τις τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές, δηλαδή την αντίστοιχη βασική λύση. Το $\sum_{i \in B}$ αντιστοιχεί στο αθροισμα όλων των ενδείξεων i, των οποίων οι μεταβλητές X_i είναι στην βάση.

Πίνακας 4. Πρότυπο πίνακα Simplex

			C1		Cr		Cm	Cm+1		Cκ		Cn
CB	B (βάση)	PO	P1		Pr		Pm	Pm+1		Pκ		Pn
C1	P1	A1	1		0		0	A 1, m+1		A 1, K		A 1, n
C2	P2	A 2	0		0		0	A 2, m+1		A 2, K		A 2, n
Cr	Pr	A r	0		1		0	A r, m+1		A r, K		A r, n
Cm	Pm	A m	0		0		1	A m, m+1		A m, K		A m, n
Πρόβλημα μεγιστοποίησης		- Zo	0				0	C m+1 - Zm+1		Cκ - Zκ		Cn - Zn
Πρόβλημα ελαχιστοποίησης		Zo	0		0		0	Zm+1- Cm+1		Zκ - Cκ		Zn - Cn

Παράδειγμα επίλυσης γραμμικού προβλήματος με χρήση αλγορίθμου Simplex

Πίνακας 5. Αρχικός πίνακας του προβλήματος μεγιστοποίησης

			0	0	0	8	5
CB	B	Po	Γ	Ε	Κ	x_B	x_A
0	Γ	60	1	0	0	1	1
0	Ε	2000	0	1	0	70	25
0	Κ	300	0	0	1	12	2.5
C_j-Z_j		0	0	0	0	8	5

Οι ακόλουθοι κανόνες μετατρέπουν την παραπάνω διαδικασία (μέθοδος simplex) σε στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις :

Επιλογή της οδηγού στήλης : Το στοιχείο που αντικαθιστά τη θετική βασική μεταβλητή είναι εκείνο με το μεγαλύτερο θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση δηλαδή εκείνο που δίνει το μεγαλύτερο οριακό όφελος σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή με μηδενική τιμή.

Επιλογή της οδηγού γραμμής : χρησιμοποιούμε κάθε ***θετικό***[4] στοιχείο της επιλεγμένης στήλης για να διαιρέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία της πρώτης στήλης. Το στοιχείο για το οποίο το πηλίκο δίνει τη μικρότερη απόλυτη τιμή επιλέγεται για την αντικατάσταση. Η οικονομική σημασία αυτού του κανόνα είναι η εξής: Οταν εισάγουμε ένα νέο προϊόν στη δραστηριότητα της επιχείρησης, οι περιορισμένοι συντελεστές που διαθέτει η επιχείρηση απεμπλέκονται απο τις τρέχουσες δραστηριότητες για να απασχοληθούν στην παραγωγή που εισάγεται. Θα μπορέσουμε να παράξουμε το νέο προϊόν μόνο όσο επιτρέπει η δυναμικότητα των συντελεστών που απελευθερώνονται από άλλες χρήσεις. Θα υπάρχει αναγκαστικά κάποια μεταβλητή που θα μειωθεί στο μηδέν. Αυτή θα είναι εκείνη μεταξύ των, έως τώρα, θετικών μεταβλητών που επιτρέπει την παραγωγή του μικρότερου αριθμού κομματιών του νέου προϊόντος. Αν επιλεγόταν οποιαδήποτε άλλη τότε θα προέκυπτε έλλειμμα καποιου παραγωγικού συντελεστή και η λύση δεν θα ήταν εφικτή.

[4] τα αρνητικά στοιχεία υποδηλώνουν αντίστροφη ανισότητα. Για παράδειγμα μεγαλύτερο ή ίσο σε πρόβλημα μεγιστοποίησης. Δεν είναι περιοριστικό στην προσπάθεια για αριστοποίηση επομένως δε λαμβάνεται υπόψη στα πηλίκα από τα οποία θα προκύψει η οδηγός γραμμή.

Στο παράδειγμα η οδηγός στήλη είναι η X_B που σημαίνει ότι για τον προσδιορισμό της οδηγού γραμμής πρέπει να βρεθεί ο πλέον περιοριστικός σε σχέση με τη X_B παραγωγικός συντελεστής. Κάθε στρέμμα που καλλιεργείται με X_B απαιτεί 1, 70 και 12 επιπλέον μονάδες από τους συντελεστές παραγωγής γή, εργασία και κυκλοφοριακό κεφάλαιο αντίστοιχα. Εφόσον οι αρχικά διαθέσιμες ποσότητες είναι 60 στρέμματα, 2000 ώρες εργασίας και 300 χρηματικές μονάδες συνεπάγεται ότι μπορούν να καλλιεργηθούν το πολύ 25 στρέμματα με βαμβάκι.

$$\min\left\{\frac{60}{1},\frac{2000}{70},\frac{300}{12}\right\}=\min\{60,\_28.57,\_25\}=25$$

Η τομή της οδηγού γραμμής και στήλης ορίζει το σημείο άξονα (περιστροφής). Επιχειρώ να κατασκευάσω νέο πίνακα όπου στο σημείο άξονα θα εμφανιστεί η μονάδα και θα μηδενιστούν τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού στήλης. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει κατ΄αρχήν να διαιρέσω την οδηγό γραμμή με το στοιχείο άξονα και στη συνέχεια να αφαιρέσω την οδηγό γραμμή από τις υπόλοιπες αφού την πολλαπλασιάσω με κατάλληλο συντελεστή ώστε να μηδενιστούν τα υπόλοιπα της στοιχεία.

Οι κανόνες εύρεσης των στοιχείων του νέου πίνακα μπορούν να κωδικοποιηθούν ω εξής:

1. Τα στοιχεία της *οδηγού γραμμής* αυτής είναι τα πηλίκα των αρχικών στοιχείων διά του αρχικού στοιχείου άξονα περιστροφής (ή κεντρικού στοιχείου)
2. τα στοιχεία της οδηγού στήλης είναι η διαφορά των αρχικών στοιχείων μείον το κεντρικό στοιχείο (άξονας) πολλαπλασιασμένο με το πηλίκο του κάθε στοιχείου της οδηγού στήλης διά το ίδιο το κεντρικό στοιχείο
3. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της μήτρας δίνονται από τον τύπο : νέο στοιχείο = αρχικό στοιχείο – (γινόμενο των δύο άλλων στοιχείων στα οποία προβάλλεται αυτό στην οδηγό στήλη και γραμμή) / κεντρικό στοιχείο

Με βάση τα παραπάνω υπολογίστηκε ο δεύτερος πίνακας για το πρόβλημα σχεδιασμού παραγωγής που εξετάζουμε.

Πίνακας 6. Υπολογισμός δεύτερου πίνακα του προβλήματος

			0	0	0	8	5
CB	B	P_o	Γ	E	K	x_B	x_A
0	Γ	$60-{}^{1\cdot 300}\!/_{12}$	$1-{}^{1\cdot 0}\!/_{12}$	$0-{}^{1\cdot 0}\!/_{12}$	$0-{}^{1\cdot 1}\!/_{12}$	$1-{}^{1\cdot 12}\!/_{12}$	$1-{}^{1\cdot 2.5}\!/_{12}$

0	Ε	$2000-70\cdot 300/12$	$0-70\cdot 0/12$	$1-70\cdot 0/12$	$0-70\cdot 1/12$	$70-70\cdot 12/12$	$25-70\cdot 2.5/12$
8	x_B	$300/12$	0	0	$1/12$	$12/12$	$2.5/12$
C_j-Z_j		$-Z_0$	$C_\Gamma - Z_\Gamma$	$C_E - Z_E$	$C_K - Z_K$	$C_B - Z_B$	$C_A - Z_A$

$$-Z_0 = -0\cdot\left(60-\left(\frac{1\cdot 300}{12}\right)\right)-0\cdot\left(2000-\left(\frac{70\cdot 300}{12}\right)\right)-8\cdot\left(60-\left(\frac{300}{12}\right)\right)=-200$$

$$C_K - Z_K = 0-0\cdot\left(0-\left(\frac{1\cdot 1}{12}\right)\right)-0\cdot\left(0-\left(\frac{70\cdot 1}{12}\right)\right)-8\cdot\left(\frac{1}{12}\right)=-0.667$$

Πίνακας 7. Δεύτερος πίνακας του προβλήματος μεγιστοποίησης

			0	0	0	8	5
CB	B	P_o	Γ	Ε	Κ	x_B	x_A
0	Γ	35	1	0	-0.083	0	0.79
0	Ε	250	0	1	-5.833	0	10.42
8	x_B	25	0	0	0.083	1	0.21
-Zo		-200	0	0	-0.667	0	3.33

Η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τώρα τιμή 200 ευρώ, που αντιστοιχεί στην βασική εφικτή λύση που περιγράφεται στη στήλη Ρο. Δηλ. στη βάση έχουν εισέλθει:

α) Η μεταβλητή απόκλισης Γ λαμβάνει τιμή στα 35 στρέμματα, όπως φαίνεται από την στήλη Ρο (δηλαδή μένουν αχρησιμοποίητα 35 στρέμματα διαθέσιμου εδάφους).

β) Η μεταβλητή απόκλισης Ε με τιμή 250 ώρες, όπως φαίνεται από τη στήλη Ρο (δηλαδή μένουν αχρησιμοποίητες 250 ώρες διαθέσιμης εργασίας).

γ) η δομική μεταβλητή X_B με τιμή 25 στρεμμάτων, όπως φαίνεται από την στήλη Ρο (δηλαδή το βαμβάκι εισέρχεται στο πρόγραμμα και καλλιεργείται σε 25 στρέμματα).

Ας εξετάσουμε την σημασία των μεγεθών που περιέχονται στον πίνακα ΙΙ Simplex:

Οι μεταβλητές άεργου δυναμικού Γ και Ε είναι στη βάση για αντίστοιχο ύψος 35 στρ. και 250 ώρες διαθέσιμων συντελεστών που παραμένουν αχρησιμοποίητοι στην παρούσα εφικτή λύση. Επειδή οι μεταβλητές άεργου δυναμικού δεν δίνουν κανένα οικονομικό αποτέλεσμα, γι' αυτό και οι αντίστοιχες τιμές τους στην πρώτη γραμμή του πίνακα Simplex είναι 0.

Η μεταβλητή απόκλισης Κ εξήλθε της βάσης και στην θέση της εισήλθε η δομική μεταβλητή X_B (καλλιέργεια βαμβακιού) σε ύψος 25 στρεμμάτων, εξαντλώντας όλο το διαθέσιμο κυκλοφοριακό κεφάλαιο (Κ).

Συνεπώς για την μεταβλητή Κ που έγινε μη βασική, η τιμή που αναφέρεται στην διασταύρωση της στήλης Κ και της γραμμής X_B σημαίνει ότι αν αυξηθεί το διαθέσιμο κυκλοφοριακό κεφάλαιο κατά μία χρηματική μονάδα, τότε η έκταση της καλλιέργειας X_B μπορεί να αυξηθεί κατά 1/12 = 0.083 στρέμματα.

Τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης Κ (-1/12 = -0.083 και -70*1/12 = -5,833) δείχνουν αντίστοιχα πόσο θα μειωθούν το διαθέσιμο έδαφος και η διαθέσιμη εργασία αν αυξηθεί η έκταση του βαμβακιού κατά 0,083 = 1/12 στρέμματα, λόγω της αύξησης του διαθέσιμου κεφαλαίου κατά μία μονάδα.

Όσον αφορά την στήλη της δομικής μεταβλητής X_A, το στοιχείο τομής με τη γραμμή X_B, εκφράζει την οριακή αναλογία υποκατάστασης μεταξύ των μεταβλητών X_B και X_A. Δηλαδή η καλλιέργεια X_B στη βάση πρέπει να μειωθεί κατά 2.5/12 = 0.208 στρ. δεδομένων των απαιτήσεων των X_B και X_A σε μονάδες κυκλοφοριακού κεφαλαίου, για να εισέλθει στη βάση η καλλιέργεια X_A και σε έκταση 1 στρέμματος.

Ακόμη, στη στήλη X_A φαίνεται ότι για να εισέλθει η καλλιέργεια X_A στη βάση και για έκταση 1 στρέμματος, θα χρησιμοποιηθούν 0.79 επιπλέον στρέμματα διαθέσιμου εδάφους (των υπολοίπων 0.21 στρεμμάτων εξοικονομηθέντων από την μείωση της καλλιέργειας X_B για αντίστοιχα στρέμματα). Επίσης στην ίδια στήλη φαίνεται ότι αν η αντίστοιχη καλλιέργεια εισέλθει στην βάση και σε έκταση 1 στρέμματος, θα χρησιμοποιηθούν επιπλέον 10.42 ώρες εργασίας, δηλαδή 25 ώρες που απαιτούνται για ένα στρέμμα X_A μείον 0.21*70 ώρες που θα εξοικονομηθούν λόγω της μείωσης της έκτασης του X_B κκατά 0.21 στρέμματα (25-0.21*70 = 10.42).

Όσον αφορά την τελευταία γραμμή C_j-Z_j, τα στοιχεία που βρίσκονται στις στήλες των μεταβλητών αποκλίσεως Γ, Ε, Κ, ονομάζονται <u>διαφυγόντα κέρδη</u> : ισοδυναμούν με την οριακή παραγωγικότητα των διαθέσιμων συντελεστών παραγωγής (ή οριακό κόστος), δηλαδή μας δείχνουν πόσο θα αυξηθεί το οικονομικό αποτέλεσμα του προγράμματος αν αυξηθεί π.χ. το διαθέσιμο κυκλοφοριακό κεφάλαιο κατά μία χρηματική μονάδα (αν είχαμε διαθέσιμη μια επιπλέον μονάδα Κ θα μπορούσαμε να παράγουμε 0.083 επιπλέον μονάδες προϊόντος (X_B) κατά συνέπεια το οικονομικό αποτέλεσμα θα αυξηθεί κατά 0.083 * 8 = 0.667

χρηματικές μονάδες). Επομένως, δείχνει πόσο θα είμασταν διαθετειμένοι να πληρώσουμε για μιά πρόσθετη μονάδα κυκλοφοριακού κεφαλαίου.

Αντιστοίχως όταν αναφερόμαστε στις στήλες των δομικών μεταβλητών στη γραμμή C_j-Z_j φαίνεται πόσο θα αυξηθεί το συνολικό οικονομικό αποτέλεσμα του προγράμματος, αν εισέλθει η δομική μεταβλητή στην βάση κατά μία μονάδα. Δηλαδή αν εισέλθει η δομική μεταβλητή X_A στην βάση και σε έκταση ενός στρέμματος όπως είδαμε πιο πάνω, θα χρησιμοποιήσει 0,79 στρέμματα από το διαθέσιμο έδαφος και θα εξοικονομηθούν τα υπόλοιπα 0,21 στρέμματα υποκαθιστώντας αντίστοιχη έκταση από την καλλιέργεια X_B που έχει ήδη εισέλθει στη βάση. Άρα το Zo θα αυξηθεί κατά 5 χρ.μον. - (0,21 στρ. x 8 χ.μ/στρ.) = 3.33 χρηματικές μονάδες.

Η γραμμή C_j-Z_j αποτελεί το κριτήριο επιλογής μιάς μεταξύ εκείνων των μεταβλητών στο πρόγραμμα, οι οποίες δεν βρίσκονται στην βάση και η εισαγωγή της οποίας θα συμβάλλει στην αύξηση του οικονομικού αποτελέσματος. Επιλέγεται δε να εισέλθει στην βάση η μεταβλητή εκείνη που έχει τον υψηλότερο θετικό αριθμό στην γραμμή C_j-Z_j.

Συνεχίζεται λοιπόν η δημιουργία πινάκων μέχρι του σημείου που δεν παρουσιάζονται πλέον θετικοί συντελεστές στην γραμμή C_j-Z_j. Αυτό θα σημαίνει ότι επιτεύχθηκε η μεγιστοποίηση του οικονομικού αποτελέσματος, δηλαδή θα έχουμε επιτύχει την άριστη λύση (max Zo).

Πίνακας 8. Τρίτος πίνακας του προβλήματος μεγιστοποίησης

			0	0	0	8	5
CB	B	P_o	Γ	E	K	x_B	x_A
0	Γ	16	1	-0.076	0.36	0	0
5	x_A	24	0	0.096	-0.56	0	1
8	x_B	20	0	-0.02	0.2	1	0
-Zo		-280	0.0	-0.320	1.2	0	0

Πίνακας 9. Τελικός πίνακας του προβλήματος μεγιστοποίησης

			0	0	0	8	5
CB	B	P_o	Γ	E	K	x_B	x_A
0	K	44.444	2.7778	-0.2111	1	0	0

5	x_A	48.889	1.5556	-0.0222	0	0	1
8	x_B	11.111	-0.5556	0.0222	0	1	0
Cj-Zj0		-333	-3.333	-0.067	0	0	0

Στον τελικό πίνακα του προγράμματος βλέπουμε ότι τα διαφυγόντα κέρδη των μη βασικών μεταβλητών, δηλαδή των παραγωγικών συντελεστών που χρησιμοποιήθηκαν πλήρως, είναι αρνητικά. Αντιπροσωπεύουν την αξία των συντελεστών στο άριστο σύστημα παραγωγής και ονομάζονται επίσης *δυϊκές τιμές*. Ο παραγωγός θα πλήρωνε 3.333 για ένα επιπλέον στρέμμα γης, 0.067 χρηματικές μονάδες για μια επιπλέον ώρα εργασίας αλλά δεν θα πλήρωνε τίποτε για πρόσθετο κυκλοφοριακό κεφάλαιο για τον απλό λόγο ότι, στην άριστη λύση, έχει περίσσευμα κυκλοφοριακού κεφαλαίου περίπου 44.5 μονάδες.