# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

## Εργαστήριο #7

| | |
|---|---|
| Ονοματεπώνυμο | |
| Αριθμός Μητρώου | |
| Τμήμα | |

1. Βρείτε, με χρήση πολικών συντεταγμένων, το εμβαδόν του δακτυλίου

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2\right\}.$$

$1'$. Όμοια για τον άνω ημι-δακτύλιο $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2, y \geq 0\right\}$.

2. Υπολογίστε, με χρήση πολικών συντεταγμένων, το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τις ευθείες $x = 0, y = 3$ και $x = y$.

$2'$. Όμοια για το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x = 2, y = 0$ και $y = x$.

3. Υπολογίστε, με χρήση πολικών συντεταγμένων, το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο (δηλ. $x \geq 0$ και $y \geq 0$) και φράσσεται από τις ευθείες $x = 0, y = \sqrt{2}$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 2^2$.

1. Ο δακτύλιος $D$ σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως εξής:

$$\Pi(D) = \Big\{(r,\theta)\ \Big|\ 0 \le \theta \le 2\pi \text{ και } 1 \le r \le 2\Big\}$$

και το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$E(D) = \iint_{\Pi(D)} r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\,d\theta = 3\pi.$$

1′. Ο άνω ημι-δακτύλιος σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως εξής:

$$\Big\{(r,\theta)\ \Big|\ 0 \le \theta \le \pi \text{ και } 2 \le r \le 4\Big\}$$

και το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$E = \int_0^{\pi}\int_2^4 r\,drd\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=2}^{r=4} d\theta = \int_0^{\pi}(8-2)\,d\theta = 6\pi.$$

2. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το χωρίο αυτό περιγράφεται ως εξής

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \big|\ y\in[x,3]\,, x\in\big[0,3\big]\big\} = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \big|\ x\in[0,y]\,, y\in\big[0,3\big]\big\}$$

και το εμβαδόν του με χρήση καρτσιανών συντεταγμένων είναι

$$\int_0^3\int_x^3 1\,dydx = \int_0^3\int_0^y 1\,dxdy.$$

Μια ημιευθεία που σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον θετικό $x$-ημιάξονα τέμνει το χωρίο αν και μόνο αν $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Συνεπώς

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

Για κάθε τέτοιο $\theta$ το εύρος $r_1 \le r \le r_2$ για το $r$ καθορίζεται από την αρχή των αξόνων, άρα $r_1 = 0$ και το σημείο $(r_2,\theta)$ που ανήκει στην ευθεία $x = 2$. Για το $r_2$ παρατηρούμε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0),(0,3)$ και $(r_2,\theta)$ είναι ορθογώνιο άρα

$$\sin\theta = \frac{3}{r_2} \Longrightarrow r_2 = \frac{3}{\sin\theta}.$$

Τελικά το χωρίο σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Pi(R) = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\le r\le\frac{3}{\sin\theta} \text{ και } \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

και το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα (σε πολικές συντεταγμένες)

$$\begin{aligned} E = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\frac{3}{\sin\theta}} r\,drd\theta &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\frac{3}{\sin\theta}} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{9}{2\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{9}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = \frac{9}{2}\Big[0-\Big(-\cot\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$2'$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το χωρίο αυτό περιγράφεται ως εξής

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y\in[0,x]\,, x\in\left[0,2\right]\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in[y,2]\,, y\in\left[0,2\right]\right\}$$

και το εμβαδόν του με χρήση καρτσιανών συντεταγμένων είναι

$$\int_0^2\int_0^x 1\,dydx = \int_0^2\int_y^2 1\,dxdy.$$

Μια ημιευθεία που σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον θετικό $x$-ημιάξονα τέμνει το χωρίο αν και μόνο αν $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Συνεπώς

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}.$$

Για κάθε τέτοιο $\theta$ το εύρος $r_1\le r\le r_2$ για το $r$ καθορίζεται από την αρχή των αξόνων, άρα $r_1=0$ και το σημείο $(r_2,\theta)$ που ανήκει στην ευθεία $x=2$. Για το $r_2$ παρατηρούμε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0),(2,0)$ και $(r_2,\theta)$ είναι ορθογώνιο άρα

$$\cos\theta=\frac{2}{r_2}\Longrightarrow r_2=\frac{2}{\cos\theta}.$$

Τελικά το χωρίο σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Pi(R)=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le r\le\frac{2}{\cos\theta} \text{ και } 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

και το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα (σε πολικές συντεταγμένες)

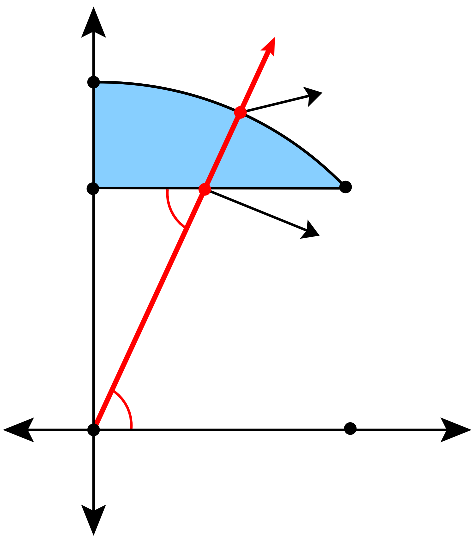
$$\begin{aligned} E=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} r\,drd\theta &= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\cos\theta}}d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \Big[2\tan\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}=2\tan\frac{\pi}{4}=2. \end{aligned}$$

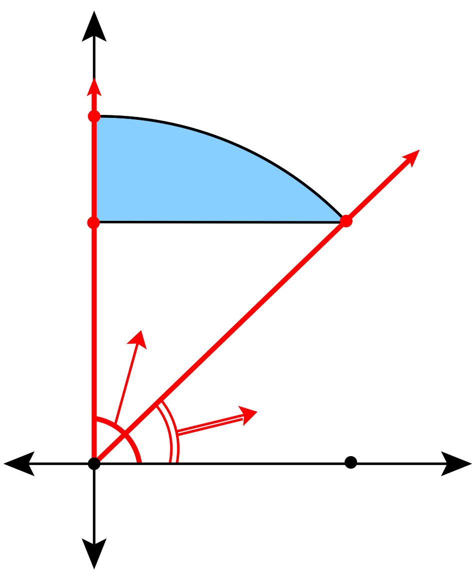
3. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το χωρίο αυτό περιγράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} R &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y\in\left[\sqrt{2},\sqrt{2^2-x^2}\right] \text{ και } x\in\left[0,\sqrt{2}\right]\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in\left[0,\sqrt{2^2-y^2}\right] \text{ και } y\in\left[\sqrt{2},2\right]\right\} \end{aligned}$$

και το εμβαδόν του με χρήση καρτσιανών συντεταγμένων είναι

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2^2-y^2}} 1\,dydx = \int_{\sqrt{2}}^2\int_0^{\sqrt{2^2-y^2}} 1\,dxdy$$





$0 \qquad \sqrt{2} \qquad 0 \qquad \sqrt{2}$

Παρατηρούμε ότι μια ημιευθεία που σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον θετικό $x$-ημιάξονα τέμνει το χωρίο αν και μόνο αν $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Συνεπώς

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Γιά κάθε τέτοιο $\theta$ το εύρος $r_1 \leq r \leq r_2$ για το $r$ καθορίζεται από το σημείο $(r_1, \theta)$ που ανήκει στην ευθεία $y = \sqrt{2}$ και $(r_2, \theta)$ που ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2^2$ (βλ. σχήμα).

Προφανώς $r_2 = 2$ και για το $r_1$ παρατηρούμε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $\left(0, \sqrt{2}\right)$ και $(r_1, \theta)$ είναι ορθογώνιο άρα

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{r_1} \Longrightarrow r_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}.$$

Τελικά το χωρίο σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\Pi(R) = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta} \leq r \leq 2 \text{ και } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

και το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα (σε πολικές συντεταγμένες)

$$\begin{aligned} E &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}^{4} r \, dr d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}^{r=2} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(2 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) d\theta \\ &= \Big[2\theta + \cot\theta\Big]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = \left(2\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{2}\right) - \left(2\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$