ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #2

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Αν $w = f(x, y) = xy + x^2$ να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dw}{dt}$ κατά μήκος της καμπύλης $\left(\cos^2 t, \sin^2 t\right)$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο $t = \pi/4$.

2. Αν $w = f(x, y) = x^2 + y^2$ και $x(t, s) = t^2 + s, y(t, s) = 1/s$ να υπολογιστεί η τιμή της $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ στο $(s, t) = (-1, -1)$.

3. Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο. Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 που μας ενδιαφέρει έχουμε $\alpha(t_0) = 1m$, $\beta(t_0) = 2m$, $\gamma(t_0) = 3m$ και

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0} = 1m/sec, \left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0} = 1m/sec, \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0} = -3m/sec$$

Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου την χρονική στιγμή t_0;

Παραδείγματα

(A) Αν $w = f(x, y, z) = x^3y + xyz$ να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dw}{dt}$ κατά μήκος της καμπύλης $(\cos t, \sin t, t)$ και να υπολογιστεί η τιμή της στο $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \\
&= (3x^2y + yz)\cdot\frac{d(\cos t)}{dt} + (x^3 + xz)\cdot\frac{d(\sin t)}{dt} + (xy)\cdot\frac{dt}{dt} \\
&= \Big[3(\cos t)^2(\sin t) + (\sin t)t\Big]\cdot(-\sin t) + \Big[(\cos t)^3 + (\cos t)t\Big]\cdot(\cos t) + [\cos t\sin t]\cdot 1 \\
&= -3\cos^2 t\sin^2 t - t\sin^2 t + \cos^4 t + t\cos^2 t + \cos t\sin t
\end{aligned}$$

Στο $t = 0$ έχουμε $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -0 - 0 + 1 + 0 + 0 = 1.$

(B) Αν $w = f(x, y, z) = x^2 + y + 2z$ με $x(t, s) = \cos(t - s)$, $y(t, s) = \sin(t - s)$ και $z(t, s) = t + s$, να βρεθεί η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ στο σημείο $(t, s) = (1, 1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= 2x\cdot\frac{\partial(\cos(t-s))}{\partial s} + 1\cdot\frac{\partial(\sin(t-s))}{\partial s} + 2\cdot\frac{\partial(t+s)}{\partial s} \\
&= 2\cos(t-s)(-\sin(t-s))(-1) + \cos(t-s)(-1) + 2\cdot 1 = \\
&= 2\cos(t-s)\sin(t-s) - \cos(t-s) + 2
\end{aligned}$$

Στο $(t, s) = (1, 1)$ έχουμε $\left.\dfrac{\partial w}{\partial s}\right|_{(1,1)} = 2\cos 0\sin 0 - \cos 0 + 2 = 1.$

(Γ) Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο. Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 που μας ενδιαφέρει έχουμε $\alpha(t_0) = 1m$, $\beta(t_0) = 2m$, $\gamma(t_0) = 3$ και

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0} = 1m/sec,\ \left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0} = 1m/sec,\ \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0} = -3m/sec$$

Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν E των πλευρών και το μήκος L των διαγωνίων του παραλληλεπιπέδου την χρονική στιγμή t_0;

Το ορθογώνιο παραλληλεπιπεδο έχει συνολικά 6 έδρες δύο εκ των οποίων έχουν εμβαδό $\alpha\beta$, δύο εμβαδό $\alpha\gamma$ και δύο εμβαδό $\beta\gamma$. Το συνολικο εμβαδό είναι $E = 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$.

Με χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος το μήκος των διαγωνίων του παραλληλεπιπέδου συναρτήσει των ακμών του είναι $L = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t_0} &= \frac{\partial\left[2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\right]}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right)+\frac{\partial\left[2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\right]}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) \\
&\qquad +\frac{\partial\left[2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\right]}{\partial\gamma}\left(\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0}\right) \\
&= 2\left[\beta(t_0)+\gamma(t_0)\right]\cdot 1+2\left[\alpha(t_0)+\gamma(t_0)\right]\cdot 1+2\left[\alpha(t_0)+\beta(t_0)\right]\cdot(-3) \\
&= 2\cdot(2+3)\cdot 1+2\cdot(1+3)\cdot 1+2\cdot(1+2)\cdot(-3)=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t_0} &= \frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right)+\frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right)+ \\
&\qquad +\frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)}{\partial\gamma}\left(\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0}\right) \\
&= \left[\frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right]_{t=t_0}\cdot 1+\left[\frac{2\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right]_{t=t_0}\cdot 1+\left[\frac{2\gamma}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right]_{t=t_0}\cdot(-3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}+\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}+\frac{3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\cdot(-3)=-\frac{6}{\sqrt{14}}.
\end{aligned}
$$

1. $w = f(x, y) = xy + x^2$, $x(t) = \cos^2 t, y(t) = \sin^2 t$.

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (y + 2x) \cdot \frac{d(\cos^2 t)}{dt} + x \cdot \frac{d(\sin^2 t)}{dt} \\
&= \left[\sin^2 t + 2\cos^2 t\right] \cdot [2(\cos t)(-\sin t)] + \cos^2 t \cdot [2(\sin t)(\cos t)] \\
&= \left[-\sin^2 t - 2\cos^2 t + \cos^2 t\right] \cdot 2\sin t \cos t \\
&= -2\sin t \cos t.
\end{aligned}$$

Στο $t = \pi/4$ έχουμε $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -1.$

2. $w = f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t, s) = t^2 + s, y(t, s) = 1/s$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \cdot \frac{\partial(t^2 + s)}{\partial t} + 2y \cdot \frac{\partial(1/s)}{\partial t} \\
&= 2(t^2 + s)2t + 2\frac{1}{s} \cdot 0 = 4t^3 + 4ts
\end{aligned}$$

Στο $(t, s) = (1, -1)$ έχουμε $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{(-1,-1)} = 4(-1)^3 + 4(-1)(-1) = 0.$

3. Ό όγκος V είναι $V = \alpha\beta\gamma$ και

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t_0} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial V}{\partial \beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\left(\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0}\right) \\
&= \frac{\partial(\alpha\beta\gamma)}{\partial \alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial(\alpha\beta\gamma)}{\partial \beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial(\alpha\beta\gamma)}{\partial \beta}\left(\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0}\right) \\
&= \beta(t_0)\gamma(t_0) \cdot 1 + \alpha(t_0)\gamma(t_0) \cdot 1 + \alpha(t_0)\beta(t_0) \cdot (-3) \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-3) = 3.
\end{aligned}$$