ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εργαστήριο #1

Ονοματεπώνυμο	
Αριθμός Μητρώου	
Τμήμα	

1. Για τις συναρτήσεις $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ και $g(x,y) = e^{x-y^2}$ να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y}$ και $\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial x}$.

2. Επιβεβαιώστε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = e^x \cos y$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Laplace
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

3. Έστω $f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών με $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x+y$. Να βρεθεί η μορφή της $f(x,y)$.

4. Έστω ότι για τις μεταβλητές x, y, z ισχύει $x + yz + z = x^2$. Να βρεθεί η $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. Για την διαφορίσιμη συνάρτηση $g(x,y)$ δίνεται ότι $\dfrac{\partial g}{\partial x} = x + yx$ και $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \alpha x^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά. Να βρεθεί η τιμή του α.

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=e^{x-y^2}$.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
g_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x-y^2\right) = e^{x-y^2} \\
g_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x-y^2\right) = -2ye^{x-y^2} \\
g_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(g_x\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = -2ye^{x-y^2} \\
g_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(g_y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2ye^{x-y^2}\right) = -2ye^{x-y^2} \qquad \text{Παρατηρήστε ότι } g_{xy}=g_{yx}
\end{aligned}$$

2. $f(x,y)=e^x\cos y$ ικανοποιεί την $f_{xx}+f_{yy}=0$.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right) = e^x\cos y \\
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right) = e^x\cos y \\
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos y\right) = e^x\left(-\sin y\right) = -e^x\sin y \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x\sin y\right) = -e^x\cos y
\end{aligned}$$

και $f_{xx}+f_{yy}=e^x\cos y+(-e^x\sin y)=0$.

3. $f_x=x+y$

$$\int f_x\ dx = \int (x+y)\ dx = \frac{x^2}{2}+xy+C$$

όπου C είναι μια σταθερά ως προς την μερική παραγώγιση ως προς x, δηλαδή, C είναι μια συνάρτηση του y. Συνεπώς, $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+xy+C(y)$.

4. $x+yz+z=x^2$

Παραγωγίζοντας (μερικώς) ως προς y και έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(x+yz+z\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) \iff \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(yz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(z\right) &= 0 \iff \\
0+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\right)z+y\frac{\partial}{\partial y}\left(z\right)+\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \iff \\
1\cdot z+y\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \iff \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z}{y+1}
\end{aligned}$$

Σημειωτέον ότι στην άσκηση αυτή, η δοθείσα εξίσωση είναι πολύ απλή και είναι δυνατόν να λύσουμε ως προς z :

$$x + yz + z = x^2 \Longleftrightarrow z(y+1) = x^2 - x \Longleftrightarrow z = \frac{x^2 - x}{y+1}$$

Έτσι έχουμε εκφράσει το z ως συνάρτηση των x, y και, συνεπώς, μπορούμε να παραγωγίσουμε

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 - x}{y+1}\right) = \left(x^2 - x\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y+1}\right) = \left(x^2 - x\right)\left(\frac{-1}{(y+1)^2}\right) = \frac{x - x^2}{(y+1)^2}$$

Οι δύο εκφράσεις ταυτίζονται αφού από την δοθείσα εξίσωση έχουμε $x^2 - x = (y+1)z$ και

$$\frac{x - x^2}{(y+1)^2} = \frac{-(y+1)z}{(y+1)^2} = \frac{-z}{y+1}.$$

Η επίλυση ως προς z δεν είναι πάντα εφικτή, π.χ. $yz - \ln z = x + y$.

Εδώ, δουλεύουμε όμοια :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(yz - \ln z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x + y) && \Longleftrightarrow \\
y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\ln z) &= 1 + 0 && \Longleftrightarrow \quad y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\
\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 && \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}
\end{aligned}$$

5. Γνωρίζουμε ότι για συναρτήσεις $g(x, y)$ που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ισχύει ότι $g_{xy} = g_{yx}$. Συνεπώς, για τις δοθείσες μερικές παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x, y)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}g(x, y)\right) && \Longleftrightarrow \\
\frac{\partial}{\partial y}(x + yx) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2\right) && \Longleftrightarrow \\
x &= 2ax && \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$