Συνοπτικές Σημειώσεις **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Κεφάλαιο #8

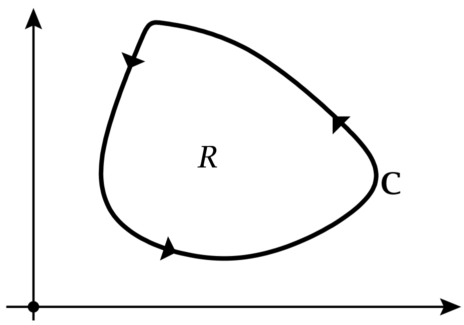
Θεώρημα Green

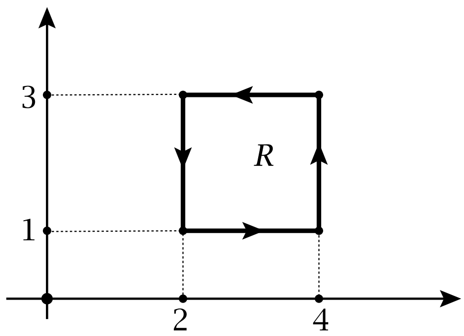
Το Θεώρημα Green μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος ενός διανυσματικού πεδίου

$$F(x,y) = \big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big)$$

όταν η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι μία διαφορίσιμη, απλή και κλειστή καμπύλη. Σημειωτέον ότι μία καμπύλη $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ λέγεται **κλειστή** εάν $\sigma(a) = \sigma(b)$ και **απλή** εάν δεν έχει αυτοτομές ή, ισοδύναμα, εάν η σ είναι αμφιμονοσήμαντη στο ανοικτό διάστημα (a,b).

Αποδεικνύεται ότι μία απλή και κλειστή καμπύλη σ στο $\mathbb{R}^2$ διαχωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο χωρία, ένα φραγμένο και ένα μη φραγμένο. Μπορούμε να καθορίσουμε προσανατολισμό για μία απλή κλειστή καμπύλη σ ως εξής: κινούμενοι επί της σ απαιτούμε το φραγμένο χωρίο να βρίσκεται αριστερά μας. Δείτε το σχήμα παρακάτω. Αυτός ο προσανατολισμός συχνά αναφέρεται και ως αντίθετος της φοράς κίνησης των δεικτών του ωρολογίου και θα χρησιμοποιούμε την συντομογραφία ΑΔΩ.





Για παράδειγμα ο μοναδιαίος κύκλος με την παραμέτρηση

$$\tau(t) = (\cos(-t), \sin(-t)), t \in [0, 2\pi]$$

είναι μια καμπύλη που έχει φορά ίδια με την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου ενώ ο μοναδιαίος κύκλος με την παραμέτρηση

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

έχει φορά αντίθετη με την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου άρα έχει προσανατολισμό ΑΔΩ.

Έστω U ένα χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ και

$$F = (F_1, F_2) : U \to \mathbb{R}^2$$

διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο. Έστω επίσης $C \subset U$ μία διαφορίσιμη, απλή και κλειστή καμπύλη προσανατολισμένη ΑΔΩ με R να είναι το χωρίο που φράσσεται από την C. Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 7 τον εξής συμβολισμό για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του F

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C F_1 dx + F_2 dy.$$

Θεώρημα Green: $\displaystyle \oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dxdy.$

Παράδειγμα: Επαληθεύουμε το Θεώρημα Green για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y) = (x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ και τον μοναδιαίο κύκλο C κέντρου $(0,0)$.

Μια παραμέτρηση ΑΔΩ για τον κύκλο C είναι η εξής:

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

και συμβολίζουμε με R το χωρίο που φράσσεται από την C, δηλαδή τον μοναδιαίο δίσκο.

$$\begin{aligned}
\oint_C F_1 dx + F_2 dy &= \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (\cos t, \sin t)'(t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t] \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin t \cos t] \, dt + \int_0^{2\pi} 1 \, dt \\
&= \left[-\frac{\sin^2 t}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} + [t]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Για το δεξιά μέλος της ισότητας του Θεωρήματος Green έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dxdy &= \iint_R \left(\frac{\partial (x)}{\partial x} - \frac{\partial (x-y)}{\partial y} \right) \, dxdy \\
&= \iint_R (1 - (-1)) \, dxdy = 2 \iint_R 1 \, dxdy = 2\pi.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι το ολοκλήρωμα $\iint_R 1 \, dxdy$ μας δίνει το εμβαδόν του χωρίου R, δηλαδή το εμβαδόν του μοναδιαίου δίσκου που είναι ίσο με π.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $F(x,y) = (3xy, x^2)$ επί της καμπύλης σ η οποία είναι το σύνορο του ορθογωνίου $[2,4]\times[1,3]$ (δείτε το δεξί μέρος του παραπάνω σχήματος). Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος θα πρέπει να καθορίσουμε παραμέτρηση για κάθε ένα από τα 4 ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν την σ. Αντ΄ αυτού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Green ως εξής:

$$\oint_\sigma (3xy)dx + (x^2)dy = \iint_R \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3xy)}{\partial y} \right) dxdy = \int_1^3 \int_2^4 (2x - 3x)\, dxdy =$$
$$= \int_1^3 \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{x=2}^{x=4} dy = \int_1^3 (-6)\, dy = [-6y]_{y=1}^{y=3} = -12.$$

Εφαρμογή: Έστω σ απλή κλειστή καμπύλη με ΑΔΩ προσανατολισμό και R το χωρίο που αυτή φράσσει. Για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y) = (-y, x)$ έχουμε:

$$\oint_\sigma (-y)dx + (x)dy = \iint_R \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R (1+1)\, dxdy =$$
$$= 2 \iint_R 1\, dxdy = 2E(R)$$

αφού το ολοκλήρωμα $\iint_R 1\, dxdy$ μας δίνει το εμβαδόν $E(R)$ του χωρίου R. Συνεπώς, το Θεώρημα Green μας παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο εύρεσης εμβαδού για ένα χωρίο R που φράσσεται από μια απλή κλειστή καμπύλη με ΑΔΩ προσανατολισμό:

$$\text{Εμβαδόν}(R) = \frac{1}{2} \oint_\sigma (-y)dx + (x)dy.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Μία παραμέτρηση ΑΔΩ για την δοθείσα έλλειψη είναι η εξής:

$$r(t) = (3\cos t, 2\sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Με βάση τον παραπάνω τύπο το ζητούμενο εμβαδόν E είναι

$$E = \frac{1}{2} \oint_\sigma (-y)dx + (x)dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-2\sin t)(3\cos t)'\, dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3\cos t)(2\sin t)'\, dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (6\sin^2 t)\, dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (6\cos^2 t)\, dt$$
$$= 3 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2)\, dt = 3 \int_0^{2\pi} 1\, dt = 6\pi.$$

Ασκήσεις

1. Επαληθεύστε το Θεώρημα Green για το δίσκο D με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $a>0$ και τα διανυσματικά πεδία

   (α) $(xy^2, -yx^2)$ (β) $(x+y, y)$ (γ) (xy, xy) (δ) $(2y, x)$

   $\left[\text{Απ: (α) } 0 \quad \text{(β) } -\pi a^2 \quad \text{(γ) } 0 \quad \text{(δ) } -\pi a^2\right]$

2. Βρείτε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green, το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας $a>0$. $[\text{Απ: } \pi a^2]$

3. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C (y)dx + (-x)dy$$

όπου C είναι το σύνορο του τεραγώνου $[-1,1]\times[-1,1]$ προσανατολισμένο ΑΔΩ. $[\text{Απ: } -8]$