Συνοπτικές Σημειώσεις **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Κεφάλαιο #7

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ - ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Διανυσματικό πεδίο σε ένα υποσύνολο U του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ ή του χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του U.

Στο μάθημά μας για ευκολία και για να αποφύγουμε τεχνικούς ορισμούς θα περιοριστούμε σε σύνολα U τα οποία είναι κυρτά και ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο U ονομάζεται κυρτό αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα στο U περιέχεται ολόκληρο στο U και ένα χωρίο U είναι ανοικτό αν για κάθε σημείο $x \in U$ υπάρχει θετικός αριθμός ϵ έτσι ώστε ολόκληρη η μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα ϵ να περιέχεται στο U.

Ένα τέτοιο κυρτό και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ θα το αποκαλούμε **χωρίο.** Για παράδειγμα, το σύνολο που φράσσεται από έναν κύκλο (ή μια έλλειψη) είναι χωρίο στο $\mathbb{R}^2$, το σύνολο που φράσσεται από μια σφαίρα είναι χωρίο στο $\mathbb{R}^3$ και, βεβαίως, ολόκληρο το $\mathbb{R}^3$ είναι χωρίο του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός: Έστω U χωρίο στον $\mathbb{R}^3$. Ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια συνάρτηση $F : U \to \mathbb{R}^3$ της μορφής

$$F(x, y, z) = \big(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\big)$$

όπου F_1, F_2, F_3 είναι πραγματικές συναρτήσεις 3 μεταβλητών $F_1, F_2, F_3 : U \to \mathbb{R}$. Συχνά χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\vec{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\,\vec{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\,\vec{\mathbf{k}}$$

όπου $\vec{\mathbf{i}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $(1, 0, 0)$ στον άξονα xx', $\vec{\mathbf{j}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $(0, 1, 0)$ στον άξονα yy', και $\vec{\mathbf{k}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $(0, 0, 1)$ στον άξονα zz'.

Το διανυσματικό πεδίο F είναι συνεχές αν οι συνιστώσες συναρτήσεις F_1, F_2, F_3 είναι συνεχείς και διαφορίσιμο αν οι συναρτήσεις F_1, F_2, F_3 είναι διαφορίσιμες (δηλαδή έχουν μερικές παραγώγους κάθε τάξης). Εν γένει, τα διανυσματικά πεδία που θα θεωρήσουμε παρακάτω θα είναι διαφορίσιμα.

Παράδειγμα: Το Πεδίο Βαρύτητας

Θεωρώντας την γη ως το σημείο $(0,0,0)$, η γη έλκει προς αυτήν ένα σώμα που βρίσκεται στο σημείο (x,y,z) του χώρου με δύναμη η οποία δίνεται από τον τύπο

$$F(x,y,z) = \left(\frac{GMmx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{GMmy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{GMmz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\right)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \frac{GMmx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{GMmy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{GMmz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\vec{\mathbf{l}} \\ &= \frac{GMm\left(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\right)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \end{aligned}$$

όπου M, m συμβολίζουν τις μάζες και G την παγκόσμια βαρυτική σταθερά, $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11}$.

Παράδειγμα: Σε κάθε σημείο της ατμόσφαιρας αντιστοιχούμε το διάνυσμα της ταχύτητας του ανέμου στο σημείο εκείνο. Αυτό είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Εν γένει, διανυσματικά πεδία είναι τα πεδία δυνάμεων και τα πεδία ταχυτήτων.

Διανυσματικό Πεδίο Κλίσης: Ένα ιδιαίτερα σημαντικό διανυσματικό πεδίο είναι το πεδίο κλίσης μιας πραγματικής συνάρτησης που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2: αν U χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ και $f: U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση τότε το διανυσματικό πεδίο

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

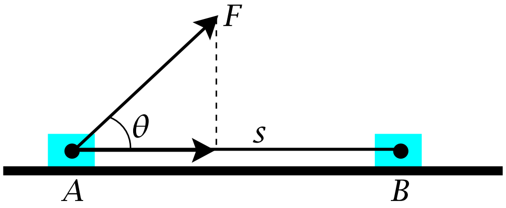
λέγεται **πεδίο κλίσης** της f.

Για παράδειγμα, αν $f(x,y,z) = x^2y + yz + xz^3$ τότε

$$\nabla f = \left(2xy + z^3, x^2 + z, y + 3xz^2\right).$$

$\boxed{\text{Εργο Δυναμησ}}$

Από την στοιχειώδη Φυσική γνωρίζουμε ότι όταν σε ένα σώμα ασκείται σταθερή δύναμη F και το σώμα μετακινείται ευθύγραμμα κατά μια απόσταση s, τότε το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται ισούται με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης κατά τον άξονα της μετατόπισης επί την μετατόπιση.



Το μέτρο της προβολής της F στον άξονα μετατόπισης είναι $|F| \cos\theta$ άρα το έργο είναι

$$W = s\,|F| \cos\theta.$$

Αφού το σώμα μετακινείται ευθύγραμμα από το σημείο A στο σημείο B, το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο $\left|\overrightarrow{AB}\right| = s$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$W = \left|\overrightarrow{AB}\right| |F| \cos\theta = F \cdot \overrightarrow{AB}$$

δηλαδή, το έργο ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

Στην γενική περίπτωση που έχουμε μια μη σταθερή δύναμη F να εξασκείται σε σώμα το οποίο μετακινείται επί διαφορίσιμης καμπύλης C, το έργο W που εκτελείται από την δύναμη F δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C F \cdot dr$ του διανυσματικού πεδίου F κατά μήκος της καμπύλης C το οποίο ορίζεται ως εξής:

Αν $r(t) = (x(t), y(t), z(t))\,, t \in [a, b]$ είναι μια παραμέτρηση της καμπύλης C, διαμερίζουμε το πεδίο ορισμού $[a, b]$ της καμπύλης σε n το πλήθος ίσα υποδιαστήματα $[t_{k-1}, t_k]\,, k = 1, \ldots, n$ με $t_0 = a, t_n = b$ και επιλέγουμε τυχαίο σημείο $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(r(\xi_k)) \cdot (r(\xi_{k-1}) - r(\xi_k))$$

για το οποίο αποδεικνύεται ότι όταν F είναι συνεχές διανυσματικό πεδίο και $r(t)$ διαφορίσιμη καμπύλη τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ υπάρχει και ορίζουμε

$$\oint_C F \cdot dr \overset{\text{ορισμ.}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Θεώρημα: $\displaystyle\oint_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt.$

Στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης, το εσωτερικό γινόμενο $F(r(t))\cdot r'(t)$ είναι ένα πραγματικός αριθμός, άρα το ολοκλήρωμά $\int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$ είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann μιας μεταβλητής για το οποίο γνωρίζουμε μεθόδους υπολογισμού του.

Παράδειγμα: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$F(x, y, z) = \left(y - x^2, z - y^2, x - z^2\right)$$

επί της καμπύλης $r(t) = (t, t^2, t^3)\,, t \in [0,1]$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&F(r(t)) = F\left(t, t^2, t^3\right) = \left(t^2 - t^2, t^3 - t^4, t - t^6\right) = \left(0, t^3 - t^4, t - t^6\right)\\
&r'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right)\\
&F(r(t)) \cdot r'(t) = \left(0, t^3 - t^4, t - t^6\right) \cdot \left(1, 2t, 3t^2\right) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8
\end{aligned}$$

οπότε

$$\oint_r F \cdot dr = \int_0^1 \left(2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\right) dt = \left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^6}{6} + \frac{3t^4}{4} - \frac{3t^9}{9}\right]_0^1 = \frac{29}{60}.$$

Συμβολισμός και Ορολογία: Αν F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις $F_1, F_2, F_3 : U \to \mathbb{R}$ του διανυσματικού πεδίου

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + F_2(x, y, z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + F_3(x, y, z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C F \cdot dr$ συχνά συμβολίζεται ως εξής

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

και η παραμέτρηση $r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ της καμπύλης C αντίστοιχα.

$$r(t) = r_1(t)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + r_2(t)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + r_3(t)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Στην βιβλιογραφία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου F που παριστάνει δυνάμεις αποκαλείται **έργο** του F. Εάν το διανυσματικό πεδίο F παριστάνει ταχύτητες αποκαλείται **ροή** του F, και εάν η καμπύλη C είναι κλειστή χωρίς αυτοτομές αποκαλείται **κυκλοφορία** του F.

Παράδειγμα: Βρείτε το έργο της δύναμης $F(x, y, z) = xy\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - yz\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ επί της καμπύλης $r(t) = t\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + t^2\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + t\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

$$\begin{aligned}
&F(r(t)) = F\left(t, t^2, t\right) = \left(t^3, t^2, -t^3\right)\\
&r'(t) = (1, 2t, 1)\\
&F(r(t)) \cdot r'(t) = \left(t^3, t^2, -t^3\right) \cdot (1, 2t, 1) = 2t^3
\end{aligned}$$

οπότε

$$\oint_r F \cdot dr = \int_0^1 2t^3\, dt = \left[\frac{2t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint_C xydx + (x + y)dy$ κατά μήκος της καμπύλης C, όπου C το τμήμα του γραφήματος της $y = x^2$ από το σημείο $(-1,1)$ μέχρι το σημείο $(2,4)$.

Μία παραμέτρηση της καμπύλης C είναι $r(t)=(t,t^2),t\in[-1,2]$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\oint_C xydx+(x+y)dy &= \int_{-1}^{2} t\,t^2\,(t)'dt+\int_{-1}^{2}\left(t+t^2\right)\left(t^2\right)'dt\\ &= \int_{-1}^{2} t^3dt+\int_{-1}^{2}\left(2t^2+2t^3\right)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{2t^3}{3}+\frac{2t^4}{4}\right]_{-1}^{2}=\frac{69}{4}.\end{aligned}$$

Συντηρητικα Διανυσματικα Πεδια - Συναρτησεισ Δυναμικου

Υπάρχουν διανυσματικά πεδία για τα οποία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας καμπύλης εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης και όχι από την διαδρομή. Για παράδειγμα, η δυναμική ενέργεια μάζας m εξαρτάται μόνο από την υψομετρική της θέση. Ακριβέστερα, για να μεταφέρουμε μάζα m από την θέση A στην θέση B το έργο που απαιτείται (θετικό ή αρνητικό) εξαρτάται από το A και το B και όχι από την διαδρομή.

Ορισμός: Έστω U χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ και $F:U\to\mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο. Αν για κάθε $A,B\in U$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C F\cdot dr$ είναι το ίδιο για κάθε καμπύλη C με άκρα τα A,B τότε λέμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του F είναι ανεξάρτητο της διαδρομής στο U και το διανυσματικό πεδίο F λέγεται **συντηρητικό** στο U.

Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\oint_A^B F\cdot dr$ αντί για $\oint_C F\cdot dr$.

Πρόταση: Αν $U\subseteq\mathbb{R}^3$ χωρίο και $f:U\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση τότε το διανυσματικό πεδίο $F=\nabla f$ της κλίσης της f είναι συντηρητικό.

Απόδειξη: Έστω C μια καμπύλη στο U με άκρα τα σημεία A,B και $r(t)=(x(t),y(t),z(t))t\in[a,b]$ μια παραμέτρηση της C. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\oint_C F\cdot dr &= \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt=\int_a^b \nabla f(r(t))\cdot r'(t)\,dt\\ &= \int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial x}(r(t)),\frac{\partial f}{\partial y}(r(t)),\frac{\partial f}{\partial x}(r(t))\right)\cdot(x'(t),y'(t),z'(t))\;dt\\ &= \int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial x}(r(t))\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(r(t))\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}(r(t))\frac{dz}{dt}\right)dt\\ &= \int_a^b\frac{d}{dt}f(r(t))\,dt=f(r(b))-f(r(a))=f(B)-f(A).\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα στην τελευταία γραμμή προκύπτει από τον κανόνα της πεπλεγμένης παραγώγισης (δες Κεφάλαιο 1, σελ. 6). Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C F \cdot dr$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στα άκρα A, B και συνεπώς είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή.

Παρατήρηση: Αν για ένα διανυσματικό πεδίο $F : U \to \mathbb{R}^3$, με συνιστώσες συναρτήσεις $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)$

$$F(x,y,z) = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\big)$$

υπάρχει $f : U \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $F = \nabla f$ τότε ισχύουν, προφανώς, οι σχέσεις

$$F_1 = f_x, F_2 = f_y, F_3 = f_z$$

και παραγωγίζοντας την πρώτη μερικώς ως προς y και την δεύτερη μερικώς ως προς x έχουμε

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = f_{xy} \overset{\star}{=} f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

(για την ισότητα $\star$ δες την ΣΗΜΕΙΩΣΗ στο Κεφάλαιο 3, σελίδα 2).
Άρα, αν $F = (F_1, F_2, F_3) = \nabla f$ τότε

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \tag{1}$$

Όμοια βρίσκουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \text{ και } \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \tag{2}$$

Ισχύει και το αντίστροφο: αν ένα διανυσματικό πεδίο $F = (F_1, F_2, F_3)$ ικανοποιεί τις σχέσεις (1) και (2) τότε υπάρχει συνάρτηση f έτσι ώστε $F = \nabla f$.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο εξής

Θεώρημα: Έστω $F : U \to \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο με συνιστώσες συναρτήσεις $F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το διανυσματικό πεδίο F είναι συντηρητικό.
2. Ισχύουν οι σχέσεις $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$ και $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$.
3. Υπάρχει $f : U \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $F = \nabla f$.
   Η συνάρτηση f λέγεται **συνάρτηση δυναμικού** για το διανυσματικό πεδίο F.

Πόρισμα: Έστω F συντηρητικό διανυσματικό πεδίο στο χωρίο U με συνάρτηση δυναμικού f, δηλαδή, $F = \nabla f$. Τότε για κάθε δύο σημεία A, B στο U ισχύει

$$\oint_A^B F \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Αν C κλειστή καμπύλη στο U τότε $\oint_C F \cdot dr = 0$.

Παράδειγμα:

(1) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ είναι συντηρητικό.

(2) Βρείτε συνάρτηση δυναμικού του F.

(3) Υπολογίστε το έργο του F κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το σημείο $A = (-1, 3, 9)$ στο σημείο $B = (1, 6, -4)$.

(1) Εξετάζουμε αν ισχύουν οι συνθήκες στο σκέλος (2) του παραπάνω θεωρήματος:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial (yz)}{\partial y} = z = \frac{\partial (xz)}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

και όμοια βρίσκουμε

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = x = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Έπεται από το παραπάνω Θεώρημα ότι το διανυσματικό πεδίο F είναι συντηρητικό.

(2) Για τον υπολογισμό συνάρτησης $f(x, y, z)$ έτσι ώστε

$$F(x, y, z) = \nabla f \quad \text{δηλαδή} \quad (yz, xz, xy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

έχουμε:

$$yz = \frac{\partial f}{\partial x} \Longrightarrow f(x, y, z) = xyz + g(y, z) \tag{3}$$

και

$$xz = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xyz + g(y, z)\Big) = xz + \frac{\partial}{\partial y} g(y, z).$$

Άρα, $\frac{\partial}{\partial y} g(y, z) = 0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $g(y, z)$ είναι σταθερά ως προς y. Δηλαδή $g(y, z) = h(z)$ είναι συνάρτηση μόνο του z και η σχέση (3) γίνεται

$$f(x, y, z) = xyz + h(z)$$

Για να βρούμε την $h(z)$ παραγωγίζουμε ως προς z και έχουμε

$$xy = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xyz + h(z)\Big) = xz + \frac{d}{dz} h(z)$$

οπότε $\frac{d}{dz} h(z) = 0 \Longrightarrow h(z) =$ σταθερός αριθμός. Τελικά η $f(x, y, z) = xyz$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού για το διανυσματικό πεδίο F.

(3) Δεν χρειάζεται να παραμετρήσουμε το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα και να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του θεωρήματος της σελίδας 3

$$\oint_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt.$$

αφού από το παραπάνω Πόρισμα έχουμε

$$\oint_A^B F \cdot dr = f(B) - f(A) = f(1,6,-4) - f(-1,3,9) = -24 - (-27) = 3.$$

Παράδειγμα:

(1) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y,z) = (x^2 + y, y^2 + x, ze^z)$$

είναι συντηρητικό.

(2) Βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού του F.

(3) Υπολογίστε το έργο του F από το σημείο $(-1,3,1)$ στο σημείο $(3,5,0)$ κατά μήκος της καμπύλης

$$r(t) = \left(-1 + t, 3 + \sqrt{t}, 1 - \frac{t}{4}\right), t \in [0,4].$$

(1) Ελέγχουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του σκέλους (2) του παραπάνω θεωρήματος:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y\right) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2+x\right),\ \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(ze^z\right),\ \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2+x\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(ze^z\right).$$

Έπεται από το παραπάνω Θεώρημα ότι το διανυσματικό πεδίο F είναι συντηρητικό.

(2) Για τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x,y,z)$ έτσι ώστε

$$F(x,y,z) = \nabla f \quad \text{δηλαδή} \quad \left(x^2 + y, y^2 + x, ze^z\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \Longrightarrow f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + g(y,z) \tag{4}$$

και

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + yx + g(y,z)\right) = 0 + x + \frac{\partial}{\partial y}g(y,z).$$

Αρα $\frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = y^2 \implies g(y,z) = \frac{y^3}{3} + h(z)$ και η σχέση (4) γίνεται

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + g(y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + h(z).$$

Τέλος, υπολογίζουμε την $h(z)$ ως εξής:

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + h(z)\right) = 0 + 0 + 0 + \frac{d}{dz}h(z).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\frac{dh}{dz} = ze^z$ και με στοιχειώδη ολοκλήρωση βρίσκουμε $h(z) = \int ze^z\,dz = (z-1)e^z + C, C \in \mathbb{R}$. Τελικά έχουμε

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + yx + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + C.$$

(3) Από το παραπάνω Πόρισμα έχουμε

$$\oint_{(-1,3,1)}^{(3,5,0)} F\cdot dr = f(3,5,0) - f(-1,3,1) = \left(\frac{27}{3} + 15 + \frac{125}{3} - e^0\right) - \left(\frac{-1}{3} - 3 + \frac{27}{3} + 0\right) = \frac{177}{3}.$$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C x^2 y\,dx + (x + y^2)\,dy$ όπου C είναι το τμήμα του γραφήματος της $y = x^3$ από το σημείο $(-1,-1)$ μέχρι το σημείο $(2,8)$.

$$\left[\text{Απ: } \int_{-1}^{2} t^2\, t^3\, (t)'dt + \int_{-1}^{2} \left(t + t^6\right)\left(t^3\right)' dt = \frac{21}{2} + \frac{729}{4}.\right]$$

2. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = (y+z)\,\vec{\mathbf{i}} + (z+x)\,\vec{\mathbf{j}} + (x+y)\,\vec{\mathbf{k}}$ και οι καμπύλες

   C_1 με παραμέτρηση $r_1(t) = (t, t^2, t^4)\,, t \in [0,1]$

   C_2 το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $(0,0,0)$ στο $(1,1,0)$

   C_3 το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $(1,1,0)$ στο $(1,1,1)$.

   Βρείτε το έργο του F κατά μήκος της C_1 και κατά μήκος της $C_1 \cup C_2$.

   Είναι το διανυσματικό πεδίο F συντηρητικό;

$$\left[\text{Απ: } \begin{array}{l} \oint_{C_1} F\cdot dr = \int_0^1 F(t,t^2,t^4)\cdot(1,2t,4t^3)\,dt = 3 \\ \oint_{C_2\cup C_3} F\cdot dr = \oint_{C_2} F\cdot dr + \oint_{C_3} F\cdot dr \\ \qquad = \int_0^1 F(t,t,0)\cdot(1,1,0)\,dt + \int_0^1 F(1,1,t)\cdot(0,0,1)\,dt \\ \qquad = \int_0^1 (2t)\,dt + \int_0^1 2\,dt = 4 \\ \text{Όχι, διότι } \oint_{C_1} F\cdot dr \neq \oint_{C_2\cup C_3} F\cdot dr. \end{array}\right]$$

3. Βρείτε το έργο της κλίσης ∇f της συνάρτησης $f(x,y) = (x+y)^3$ κατά μήκος του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ από το σημείο $(2,0)$ μέχρι το σημείο $(-2,0)$ στο άνω ημιεπίπεδο.

   Ποιο το έργο της κλίσης αν διατρέξουμε όλο τον κύκλο C ξεκινώντας από το σημείο $(2,0)$ και επανέλθουμε σε αυτό;

$$\left[\text{Απ: } \begin{array}{l} \int_{(2,0)}^{(-2,0)} \nabla f\cdot dr = f(-2,0) - f(2,0) = -8 - 8 = -16 \\ \int_C \nabla f\cdot dr = f(2,0) - f(2,0) = 8 - 8 = 0. \end{array}\right]$$

4. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\oint_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

   είναι ανεξάρτητο της διαδρομής από το A στο B.

[Απ: Εφαρμόστε το σκέλος (1)$\Longleftrightarrow$(2) του θεωρήματος.]

5. Βρείτε συνάρτηση δυναμικού για τα παρακάτω διανυσματικά πεδία:

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{y}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{1-x^2}{y}\right)\vec{\mathbf{j}}$$

$$G(x,y,z) = (y\sin z)\,\vec{\mathbf{i}} + (x\sin z)\,\vec{\mathbf{j}} + (xy\cos z)\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$H(x,y,z) = (e^x\ln y)\,\vec{\mathbf{i}} + \left(\tfrac{e^x}{y} + \sin z\right)\vec{\mathbf{j}} + (y\cos z)\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\left[\text{Απ:}\quad \begin{array}{l} f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{1}{y}, \quad g(x,y,z) = xy\sin z \\ h(x,y,z) = e^x\ln y + y\sin z \end{array}\right]$$