Κεφάλαιο #2

Κλιση - Κατα Διευθυνση Παραγωγος

Καμπυλες

Θα ασχοληθούμε με καμπύλες στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Οι παρακάτω ορισμοί και ιδιότητες των καμπυλών δίνονται για το $\mathbb{R}^3$ και πανομοιότυπα ισχύουν για το $\mathbb{R}^2$.
Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Μια **καμπύλη** στον $\mathbb{R}^3$ είναι μια συνάρτηση

$$r : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Η εικόνα $C = r(I) = \{r(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I\}$ της συνάρτησης αναφέρεται επίσης (καταχρηστικά) ως καμπύλη στο χώρο (ή στο επίπεδο) και μας επιτρέπει διαισθητικά να κατανοήσουμε την μορφή της καμπύλης.
Συνήθως γράφουμε $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$. Η πραγματική μεταβλητή $t \in I$ ονομάζεται παράμετρος της καμπύλης και η συνάρτηση $r(t)$ μαζί με τις συνιστώσες συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ ονομάζεται **παραμετρικοποιημένη καμπύλη.**

Στην συνέχεια θα υποθέτουμε πάντοτε ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ της καμπύλης είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως προς $t \in I$. Αν λοιπόν $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$ είναι μια (παραμετρικοποιημένη) καμπύλη η παράγωγός της ισούται με $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ και γεωμετρικά παρίσταται με ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπυλη r στο σημείο $r(t)$ αυτής.

Παράδειγμα 1: Ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ στο επίπεδο ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $x^2+y^2 = 1$ και ως παραμετρικοποιημένη καμπύλη δίδεται από την συνάρτηση

$$r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Παράδειγμα 2: Ο κύκλος κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας $\rho > 0$ στο επίπεδο $[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2]$ δίδεται, ως παραμετρικοποιημένη καμπύλη, από την συνάρτηση

$$r(t) = (x_0 + \rho\cos t, y_0 + \rho\sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Παράδειγμα 3: Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0) και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $v = (a, b, c)$ δίδεται, ως παραμετρικοποιημένη καμπύλη, από την συνάρτηση

$$r(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)\,, t \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 4: Μια παραμέτρηση για το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $A = (a_1, a_2, a_3)$ και $B = (b_1, b_2, b_3)$ στον $\mathbb{R}^3$ μπορεί να βρεθεί ως εξής: Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $A = (a_1, a_2, a_3)$ και είναι παράλληλη στην διεύθυνση του $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z(t) = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{array} \right\}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Περιορίζοντας την παράμετρο t στο διάστημα $[0, 1]$ έχουμε την παραμέτρηση

$$\begin{aligned} r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) &= \big(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)\big) \\ &= \big((1-t)a_1 + tb_1, (1-t)a_2 + tb_2, (1-t)a_3 + tb_3\big) \\ &= (1-t)\,(a_1, a_2, a_3) + t\,(b_1, b_2, b_3) \\ &= (1-t)A + tB \end{aligned}$$

η οποία έχει αρχικό σημείο το $r(0) = (1-0)A + 0B = A$ και τελικό σημείο το $r(1) = (1-1)A + 1B = B$.

Παράδειγμα 5: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Το γράφημα της f είναι μια καμπύλη η οποία, ως παραμετρικοποιημένη καμπύλη, δίδεται από την συνάρτηση

$$r(t) = (x, f(x))\,, x \in [a, b].$$

Παρατήρηση: Έστω $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη, J ένα άλλο διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $\rho : J \to I$ μια οιαδήποτε συνεχής και αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (τα διαστήματα I και J είναι είτε αμφότερα ανοικτά είτε αμφότερα κλειστά). Τότε η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend left, "r \circ \rho"] & I \arrow[r, "r"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

είναι και αυτή μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη. Προφανώς, οι καμπύλες

$$r : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{και} \quad r \circ \rho : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έχουν την ίδια εικόνα $r(I) = r(\rho(J)) = (r \circ \rho)(J) = C$.
Με άλλα λόγια η καμπύλη C έχει δύο διαφορετικές παραμετρικοποιήσεις.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$\rho : [0, \pi] \to [0, 2\pi] : \rho(s) = 2s$$

είναι 1-1 και επί και έτσι η σύνθεση της καμπύλης $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ του Παραδείγματος 1 παραπάνω με την ρ

$$[0, \pi] \xrightarrow{\quad r\circ\rho \quad} \mathbb{R}^2 : (r \circ \rho)(s) = r(\rho(s)) = r(2s) = (\cos(2s), \sin(2s))$$

είναι μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ που παραμετρικοποιεί τον μοναδιαίο κύκλο.

Παράδειγμα 6: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η καμπύλη

$$r_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, r_n(t) = (t^n, t^n)$$

είναι μια παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 1)$.

Κατα διευθυνση Παραγωγος

Έστω συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $U \subset \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης σε κάθε σημείο του U. Για σημείο $p_0 \in U$ ορίζουμε την **κλίση της f στο $\mathbf{p_0}$** να είναι το διάνυσμα

$$\nabla f(p_0) := \big(f_x(p_0), f_y(p_0)\big) \quad \text{αν} \quad U \subset \mathbb{R}^2$$

$$\nabla f(p_0) := \big(f_x(p_0), f_y(p_0), f_z(p_0)\big) \quad \text{αν} \quad U \subset \mathbb{R}^3.$$

Αν $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ μοναδιαίο διάνυσμα τότε η **παράγωγος της f στο $\mathbf{p_0}$ στην κατεύθυνση του** u, συμβολισμός $D_u(p_0)$ ορίζεται να είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$D_u(p_0) := \nabla f(p_0) \cdot u = f_x(p_0)u_1 + f_y(p_0)u_2 + f_z(p_0)u_3.$$

Για συναρτήσεις 2 μεταβλητών έχουμε ανάλογο ορισμό

$$D_u(p_0) := \nabla f(p_0) \cdot u = \big(f_x(p_0), f_y(p_0)\big) \cdot (u_1, u_2) = f_x(p_0)u_1 + f_y(p_0)u_2.$$

Ιδιότητες: Συμβολίζουμε με $\theta \in [0, \pi]$ την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\nabla f(p_0), u$ και έχουμε

$$D_u(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot u = \left|\nabla f(p_0)\right| |u| \cos\theta = \left|\nabla f(p_0)\right| \cos\theta$$

Υποθέτουμε ότι η κλίση $\nabla f(p_0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα (άλλως, η $D_u(p_0)$ μηδενίζεται σε κάθε διεύθυνση u) και έχουμε:

(1) η $D_u(p_0)$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή της, η οποία είναι $\left|\nabla f(p_0)\right|$, όταν $\cos\theta = 1 \iff \theta = 0$, δηλαδή, όταν το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(p_0)$ είναι παράλληλο και ομόρροπο (θετικό πολλαπλάσιο) του u.

(2) η $D_u(p_0)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της, η οποία είναι $-\left|\nabla f(p_0)\right|$, όταν $\cos\theta = -1 \iff \theta = \pi$, δηλαδή, όταν το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(p_0)$ είναι παράλληλο και αντίρροπο (αρνητικό πολλαπλάσιο) του u.

(3) η $D_u(p_0) = 0 \iff \nabla f(p_0) \perp u$.

Με άλλα λόγια, στην περίπτωση (1) ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της f είναι στην κατεύθυνση της κλίσης $\nabla f(p_0)$. Αντίστοιχα, στην περίπτωση (2) ο μέγιστος ρυθμός μείωσης της f είναι στην κατεύθυνση $-\nabla f(p_0)$ και η f παραμένει αμετάβλητη (σταθερή) στις κατευθύνσεις που είναι εγκάρσιες στην κλίση.

Παρατήρηση: Συχνά χρησιμοποιούμε μη μοναδιαία διανύσματα v προκειμένου να αναφερθούμε στην κατά διεύθυνση παράγωγο $D_v(p_0)$ μιας συνάρτησης f. Αυτό δεν δημιουργεί σύγχυση αφού η κατεύθυνση του v και του μοναδιαίου $\dfrac{v}{|v|}$ ταυτίζονται. Όταν πρόκειται όμως να υπολογίσουμε την κατά διεύθυνση παράγωγο θα πρέπει προηγουμένως να κανονικοποιήσουμε το v στο μοναδιαίο $\dfrac{v}{|v|}$ που αντιστοιχεί, δηλαδή, αν v όχι μοναδιαίο τότε

$$D_v(p_0) := \nabla f(p_0) \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|}\left(\nabla f(p_0) \cdot v\right) = \frac{1}{|v|}\left|\nabla f(p_0)\right| |v| \cos\theta = D_{\frac{v}{|v|}}(p_0).$$

Παράδειγμα 7: Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ και το σημείο $p_0 = (1,1)$. Υπολογίζουμε την κλίση της f στο σημείο $(1,1)$:

$$\nabla f(1,1) = \Big(f_x(1,1), f_y(1,1)\Big) = \Big([2x]_{(1,1)}, [2y]_{(1,1)}\Big) = (2,2).$$

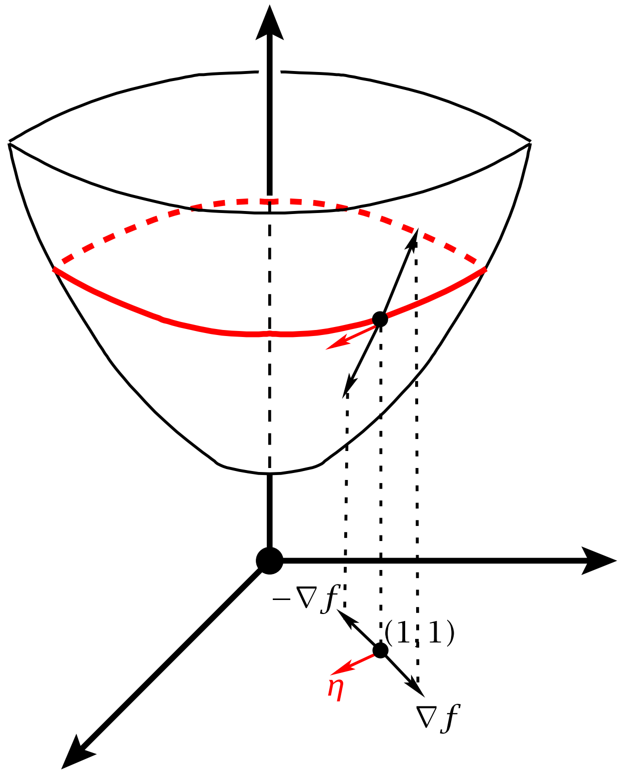
Η f παρουσιάζει τον μέγιστο ρυθμό αύξησης στην κατεύθυνση του διανύσματος $(2,2)$ και ο ρυθμός αυτός (δηλαδή η παράγωγος στην κατεύθυνση αυτή) είναι $\left|\nabla f(1,1)\right| = |(2,2)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Για να κάνουμε τον παραπάνω υπολογισμό με χρήση του ορισμού βρίσκουμε πρώτα το μοναδιαίο u στην κατεύθυνση του $(2,2)$ το οποίο είναι

$$u = \frac{1}{|(2,2)|}(2,2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

και έχουμε

$$D_{(2,2)}(1,1) \equiv D_u(1,1) \overset{\text{ορ.}}{=} \nabla f(1,1) \cdot u = (2,2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$



Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το γράφημα της συνάρτησης f και αποτυπώνονται το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(1,1)$ στο σημείο $(1,1)$ και το εγκάρσιο διάνυσμα η. Η κόκκινη καμπύλη (κύκλος) είναι το σύνολο των σημείων του γραφήματος με $z = f(x,y) = f(1,1) = 3$ ή, ισοδύναμα, f αμετάβλητη στην διεύθυνση η.

Στις διευθύνσεις $\eta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $-\eta = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ η f είναι σταθερή αφού

$$\eta \cdot \nabla f(1,1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (2,2) = \frac{\sqrt{2}}{2}2 - \frac{\sqrt{2}}{2}2 = 0$$

δηλαδή, η παράγωγος $D_\eta(1,1) = 0$. Όμοια επαληθεύουμε $D_{-\eta}(1,1) = 0$.

Παράδειγμα 8: Έστω η συνάρτηση $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$ και το σημείο $p = (4,2,1)$. Ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της g είναι στην κατεύθυνση της κλίσης

$$\begin{aligned}\nabla g(p) = (g_x(p), g_y(p), g_z(p)) &= \left(\left[\frac{1}{y}\right]_p, \left[\frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}\right]_p, \left[\frac{-y}{z^2}\right]_p\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{2^2} + \frac{1}{1}, -\frac{2}{1}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)\end{aligned}$$

και ισούται με $|\nabla g(p)| = \left|\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Πανομοιότυπα έχουμε ότι ο μέγιστος ρυθμός μείωσης της g είναι στην κατεύθυνση $-\nabla g(p)$ και ισούται με $-|\nabla g(p)| = -\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Παράδειγμα 9: Έστω ότι γνωρίζουμε ότι η κατά διεύθυνση παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο p_0 γίνεται μέγιστη στην κατεύθυνση $\eta = (1,1,-1)$ και ισούται με $2\sqrt{3}$. Με αυτά τα στοιχεία μπορούμε να βρούμε την τιμή της κατά διεύθυνση παραγώγου της f σε οιαδήποτε κατεύθυνση:

Για την παράγωγο της f στο p_0 στην κατεύθυνση τυχαίου $u = (a, b, c)$, υπολογίζουμε το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζουν τα η, u από τον τύπο $\cos\theta = \dfrac{\eta \cdot u}{|\eta||u|}$ και στην συνέχεια έχουμε: αν $u_0 = \frac{u}{|u|}$ το μοναδιαίο στην κατεύθυνση του u τότε

$$D_u(p_0) \equiv D_{u_0}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot u_0 = |\nabla f(p_0)|\, |u_0| \cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta.$$

Για συγκεκριμένο u, ας πούμε, $u = (1, 1, 0)$, υπολογίζουμε

$$\cos\theta = \frac{(1,1,-1)\cdot(1,1,0)}{|(1,1,-1)|\,|(1,1,0)|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

και άρα

$$D_{(1,1,-1)}(p_0) = 2\sqrt{3}\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Εγκαρσιοτητα του διανυσματος Κλισης

Έστω $f(x, y)$ μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Για c που ανήκει στην εικόνα της f, το σύνολο

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\right\}$$

είναι μια καμπύλη η οποία ονομάζεται ισοσταθμική καμπύλη για την f. Έστω $r(t) = (x(t), y(t))$ μια παραμέτρηση της C. Από την σχέση $f(x(t), y(t)) = c$ έχουμε

$$0 = \frac{d}{dt}c = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \nabla f \cdot r'(t).$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει σε κάθε σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της f και έτσι έχουμε την παρακάτω

Πρόταση: Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της ισοσταθμικής καμπύλης που διέρχεται από το (x_0, y_0).

Πανομοιότυπα, για μια συνάρτηση 3 μεταβλητών $F(x, y, z)$ έχουμε ότι το σύνολο

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = c\right\}$$

είναι μια επιφάνεια η οποία ονομάζεται ισοσταθμική επιφάνεια για την F και παραγωγίζοντας την σχέση $F(x, y, z) = c$ έχουμε, με το ίδιο σκεπτικό όπως στην διάσταση 2, την παρακάτω

Πρόταση: Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $F(x, y, z) = c$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) αυτής.

Παράδειγμα 10: Έστω το επίπεδο Π με εξίσωση $2x - 3y + z = 2$. Όπως ήδη γνωρίζουμε, το κάθετο διάνυσμα στο Π δίνεται από τους συντελεστές των μεταβλητών x, y, z δηλαδή, είναι το διάνυσμα $(2, -3, 1)$.
Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $F(x, y, z) = 2x - 3y + z$, τότε το Π είναι μια ισοσταθμική επιφάνεια για την F και συγκεκριμένα,

$$\Pi = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 2\Big\}$$

και, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, το κάθετο διάνυσμα σε (κάθε) σημείο (x_0, y_0, z_0) του Π είναι

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) = (2, -3, 1).$$

$\boxed{\text{ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ}}$

Θεωρούμε όπως παραπάνω μια συνάρτηση 3 μεταβλητών $F(x, y, z)$, μια ισοσταθμική επιφάνεια για την F

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = c\Big\}$$

και ένα σημείο $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, δηλαδή, $F(x_0, y_0, z_0) = c$.
Εάν Π είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια S στο σημείο p_0, τότε το Π είναι κάθετο στο κάθετο διάνυσμα της S στο p_0, δηλαδή στο διάνυσμα

$$\nabla F(p_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p_0), \frac{\partial F}{\partial y}(p_0), \frac{\partial F}{\partial z}(p_0)\right) \equiv (F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0))$$

Άρα η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου Π είναι

$$\begin{aligned}
\nabla F(p_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, x - z_0) &= 0 \iff \\
(F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0, x - z_0) &= 0 \iff \\
F_x(p_0)(x - x_0) + F_y(p_0)(y - y_0) + F_z(p_0)(z - z_0) &= 0
\end{aligned}$$

Για να βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας L_{p_0} που διέρχεται από το $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η ευθεία L_{p_0} είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\nabla F(p_0) = \big(F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0)\big)$, οπότε οι παραμετρικές εξισώσεις της L_{p_0} είναι

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + F_x(p_0)t \\
y &= y_0 + F_y(p_0)t \qquad t \in \mathbb{R}. \\
z &= z_0 + F_z(p_0)t
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 11: Έστω η σφαίρα $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ και το σημείο $p_0 = (1, -1, 1)$ αυτής.

Για να βρούμε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στην Σ στο σημείο p_0 θεωρούμε την συνάρτηση $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και η Σ είναι η ισοσταθμική επιφάνεια $F(x,y,z) = 3$. Υπολογίζουμε την κλίση στο $p_0 = (1,-1,1)$

$$\nabla F(p_0) = (F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0)) = \big(2x|_{(1,-1,1)}, 2y|_{(1,-1,1)}, 2z|_{(1,-1,1)}\big) = (2,-2,2)$$

και η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στην Σ στο σημείο $p_0 = (1,-1,1)$ είναι

$$2(x-1) - 2(y+1) + 2(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 3.$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στην Σ στο σημείο $(1,-1,1)$

$$\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -1-2t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 1+2t \end{array}$$

Παράδειγμα 12: Έστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{2} + x^2y + xyz$ και θέλουμε να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο και την κάθετη ευθεία στο σημείο $p_0 = (2,1,1)$ αυτής.

Θέτουμε $F(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + x^2y + xyz$ και υπολογίζουμε

$$\nabla F = \Big(x + 2xy + yz, x^2 + xz, xy\Big) \Longrightarrow \nabla F(2,1,1) = (7,6,2)$$

οπότε το εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο $(2,1,1)$ είναι

$$\begin{aligned} F_x(p_0)(x-x_0) + F_y(p_0)(y-y_0) + F_z(p_0)(z-z_0) = 0 \Longrightarrow \\ 7(x-2) + 6(y-1) + 2(z-1) = 0 \Longrightarrow \\ 7x + 6y + 2z = 22. \end{aligned}$$

Η κάθετη ευθεία στην S στο σημείο $(2,1,1)$ είναι $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+7t \\ y &=& 1+6t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$

Ασκήσεις

1. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τον μέγιστο και ελάχιστο ρυθμό μεταβολής στα σημεία που δίνονται καθώς και την κατεύθυνση στην οποία αυτό συμβαίνει. Σε ποιά κατεύθυνση ο ρυθμός μεταβολής είναι 0;

   $$f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}, p=(4,2,1) \quad \text{και} \quad g(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right), p=(1,2)$$

   Βρείτε επίσης τον ρυθμό μεταβολής της f στο $p=(4,2,1)$ στην κατεύθυνση $u=(2,1,3)$.

2. Βρείτε την παράγωγο της $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ στο σημείο $p=(1,-2)$ στην διεύθυνση του διανύσματος $v=(3,-4)$.

   $\left[\text{Απ: } D_v f(p)=\nabla f(p)\cdot\frac{v}{|v|}=\frac{22}{25}\right]$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z)=2xy-yz$ και σημείο $p=(1,-1,1)$. Υπάρχει διεύθυνση u έτσι ώστε η παράγωγο της f στην διεύθυνση του διανύσματος u να έχει την τιμή -3?

   $\left[\text{Απ: Όχι διότι } |\nabla f(p)|=\sqrt{6} \text{ και τότε } \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{6}}<-1\right]$

4. Έστω $f(x,y)$ συνάρτηση με συνεχείς δεύτερες παραγώγους και $A=(1,3), B=(3,4)$, $\Gamma=(1,7)$ και $\Delta=(6,15)$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο A στην διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι 3 και η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο A στην διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι 26. Να βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο της f στο σημείο A στην διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

   Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα την κλίση $\nabla f(A)=(\lambda,\mu)$ της f στο A λύνοντας το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 3=D_{\overrightarrow{AB}}f(A)=(\lambda,\mu)\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \\ 26=D_{\overrightarrow{A\Gamma}}f(A)=(\lambda,\mu)\cdot\frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|}\end{array}\right\}$ με αγνώστους τα λ,μ.

5. Βρείτε την εξισωση του εφαπτομένου επιπέδου και της κάθετης ευθείας της επιφάνειας που ορίζεται από την εξίσωση $2z-x^2=0$ στο σημείο $(2,0,2)$.

   $$\left[\text{Απ:} \quad 2x-z=2, \quad \begin{array}{rcl} x&=&2-4t \\ y&=&0 \\ z&=&2+2t\end{array} \quad t\in\mathbb{R}.\right]$$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ με πεδίο ορισμού τον δίσκο $\{x^2 + y^2 \leq 3\}$ και το σημείο $p_0 = (1, 1, f(1,1)) = (1, 1, 1)$ του γραφήματός της. Βρείτε την εξισωση του εφαπτομένου επιπέδου και της κάθετης ευθείας του γραφήματος της f στο σημείο p_0.

$$\left[\text{Απ:} \quad x + y + z = 3, \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1 - t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 1 - t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}. \right]$$