Κεφάλαιο #1

Συναρτησεις Πολλων Μεταβλητων

Ορισμοι και Παραδειγματα

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση n μεταβλητών ορισμένη στο U είναι ένας κανόνας που σε κάθε σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ αντιστοιχίζει έναν πραγματικό αριθμό $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Συμβολικά γράφουμε $f : U \to \mathbb{R}$.
Εν γένει, οι συναρτήσεις που θα μελετήσουμε στο μάθημα του ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ θα έχουν πεδίο ορισμού υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα: $f(x, y) = 2xy + y^2$ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

Στο εξής, πανομοιότυπα με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, θα γράφουμε τον τύπο της συνάρτησης f και θα εννοείται ότι το πεδίο ορισμού της είναι εκείνο το υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ στα σημεία του οποίου η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη.

Παραδείγματα:
$f(x, y) = \ln(y - x)$ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το σύνολο $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$.
$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ είναι μία συνάρτηση τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού το σύνολο $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ ορίζουμε το **γράφημα της** f ως το σύνολο όλων των σημείων του $\mathbb{R}^3$ που είναι της μορφής $(x, y, f(x, y))$

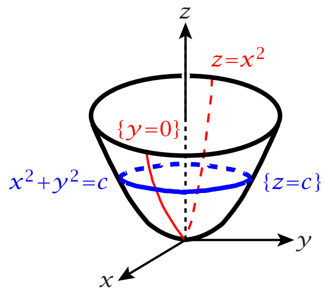
$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\Big\}.$$

Παραδείγματα:
$f(x, y) = 1 - x - y$. Το γράφημα αυτής της συνάρτησης αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την σχέση $z = 1 - x - y$ ή, ισοδύναμα,

$$x + y + z = 1$$

Γνωρίζουμε από τα μαθηματικά του πρώτου εξαμήνου ότι τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση απαρτίζουν ένα επίπεδο, συνεπώς, το γράφημα της $f(x, y) = 1 - x - y$ είναι το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $(1,0,0)$ (σημειωτέον, $1+0+0=1$) και είναι εγκάρσιο στο διάνυσμα $(1,1,1)$.

Το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$ είναι το σύνολο $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z\}$. Η τομή του συνόλου αυτού με το επίπεδο $\{z=c\}$, που είναι παράλληλο με το xy−επίπεδο, είναι ένας κύκλος $x^2+y^2=(\sqrt{c})^2$ ακτίνας $\sqrt{c}$.



Το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2$ αποτελεί μία επιφάνεια που δίδεται στο παραπάνω σχήμα και ονομάζεται παραβολοειδές διότι η τομή της με κάθε επίπεδο που περιέχει το z-άξονα είναι παραβολή (π.χ η τομή με το επίπεδο $\{y=0\}$ είναι η παραβολή $z=x^2$).

Όρια και Συνέχεια

Στα παρακάτω γίνεται αναφορά σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών αλλά όλα γενικεύονται με πανομοιότυπο τρόπο σε συναρτήσεις τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Έστω $f:U\to\mathbb{R}$ συνάρτηση δύο μεταβλητών $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ και $a\in\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το **όριο** της f όταν το (x,y) τείνει στο (x_0,y_0) είναι a, και το συμβολίζουμε $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$, εάν οι τιμές $f(x,y)$ της συνάρτησης πλησιάζουν το a όταν το x πλησιάζει το x_0 και το y πλησιάζει y_0.

Σημείωση: Για τον ορισμό του ορίου $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ δεν απαιτείται το (x_0,y_0) να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Αρκεί να υπάρχουν σημεία (x,y) οσοδήποτε κοντά στο (x_0,y_0) στα οποία να ορίζεται το $f(x,y)$.

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες ορίων που γνωρίζουμε για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής από τα μαθηματικά του πρώτου εξαμήνου. Σημειωτέον επίσης ότι το όριο μια συνάρτησης δεν υπάρχει πάντα, όπως φαίνεται από το παρακάτω

Παράδειγμα: $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Για σημεία $(x,y)\in U$ για τα οποία ισχύει $x=y$ (δηλαδή βρίσκονται στην ευθεία $y=x$) η τιμή της συνάρτησης είναι σταθερή και ίση με 1:

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2xx}{x^2+x^2}=\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

Για σημεία $(x, y) \in U$ για τα οποία ισχύει $x = -y$ (δηλαδή βρίσκονται στην ευθεία $y = -x$) η τιμή της συνάρτησης είναι και πάλι σταθερή ίση με -1:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x(-x)}{x^2+(-x)^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1.$$

Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ ώστε οι τιμές της συνάρτησης f να πλησιάζουν το a όταν $x \to 0$ και $y \to 0$.

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : U \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **συνεχής** στο $(x_0, y_0) \in U$ αν υπάρχει το όριο της f στο (x_0, y_0) και ισούται με $f(x_0, y_0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Όλες οι ιδιότητες για την συνέχεια που γνωρίζουμε για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής από τα μαθηματικά του πρώτου εξαμήνου ισχύουν και για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Ειδικώτερα, όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται με κλειστό τύπο με χρήση των κλασσικών συναρτήσεων του Απειροστικού Λογισμού (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, ρητές κλπ) είναι συνεχείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα, οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

$$f_1(x,y) = y^2 + \sin x, \quad f_2(x,y) = 1 + x^2y^2, \quad f_3(x,y) = \frac{xy}{x^2+1}$$

Αν $z = f(x, y)$ συνεχής συνάρτηση 2 μεταβλητων και $w = g(z)$ συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής τότε η σύνθεσή τους $w = g(f(x, y))$, εφόσον αυτή ορίζεται, είναι συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

$$f_4(x,y) = e^{y^2+\sin x}, \quad f_5(x,y) = \ln(1+x^2y^2), \quad f_6(x,y) = \cos\left(\frac{xy}{x^2+1}\right).$$

Ορισμος Μερικης Παραγωγου και Υπολογισμοι

Έστω $f : U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^2$ συνάρτηση. Η **μερική παράγωγος της $\mathbf{f(x,y)}$ ως προς $\mathbf{x}$** στο σημείο (x_0, y_0) ορίζεται ως το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) := \lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

εφ΄ όσον το όριο αυτό υπάρχει. Χρησιμοποιείται συχνά και ο συμβολισμός $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

Σημείωση: όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έτσι και εδώ για να θεωρήσουμε το παραπάνω όριο θα πρέπει το πεδίο ορισμού U να περιέχει σημεία κοντά στο (x_0, y_0). Αυτό εξασφαλίζεται αν υποθέσουμε ότι για κάθε $(x_0, y_0) \in U$ υπάρχει ένας δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) που να περιέχεται ολόκληρος στο U.

Αν το όριο υπάρχει για κάθε $(x_0, y_0) \in U$ τότε λέμε ότι υπάρχει η συνάρτηση μερική παράγωγος της f ως προς x και την συμβολίζουμε με $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ή f_x.
Πανομοιότυπα, έχουμε την μερική παράγωγο της f ως προς y:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{(x_0,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Οι συναρτήσεις f_x, f_y, όταν αυτές υπάρχουν, είναι συναρτήσεις 2 μεταβλητών οπότε μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των f_x, f_y, ως προς x και y:

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} \qquad \frac{\partial f_x}{\partial y} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{xy}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{yx} \qquad \frac{\partial f_y}{\partial y} \overset{\text{συμβ.}}{\equiv} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy}$$

Ισχύουν όλοι οι κανόνες παραγώγισης που γνωρίζουμε για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβητής:

$$\frac{\partial (cf)}{\partial x} = c\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial (f \pm g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Παραγώγιση σύνθεσης συναρτήσεων: $\dfrac{\partial (f \circ g)}{\partial x} = \dfrac{d}{d(g(x))}\left(f(g(x))\right) \cdot \dfrac{\partial g(x)}{\partial x}$.

Παραδείγματα: Για τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου ως προς x χρησιμοποιούμε τους παραπάνω κανόνες παραγώγισης θεωρώντας την μεταβλητή y ως σταθερά.

1. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y + 1$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 3xy + y + 1\right) = 2x - 3y + 0.$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 3xy + y + 1\right) = -3x + 1.$$

Επίσης,

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y) = 2$$

και

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y) = -3.$$

2. $f(x,y) = e^{x-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x-y^2\right) = e^{x-y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x-y^2\right) = -2ye^{x-y^2}.$$

Επίσης, $f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}, f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = -2ye^{x-y^2} = f_{yx}$ και

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2ye^{x-y^2}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial y}(-2y)\right]e^{x-y^2} + (-2y)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = -2e^{x-y^2} + 4y^2e^{x-y^2}.$$

Πανομοιότυπα εργαζόμαστε για τον ορισμό και τους υπολογισμούς των μερικών παραγώγων όταν η συνάρτηση f είναι συνάρτηση 3 μεταβλητών ($U \subset \mathbb{R}^3$):

3. $f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

$$\begin{array}{lll} f_y = -4xyz + x^2 & f_z = -2xy^2 & f_{zz} = 0 \\ f_{yx} = -4yz + 2x & f_{yy} = -4xz & f_{yyy} = 0 \\ f_{yxy} = -4z & & \end{array}$$

4. $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2+y^2+z^2)\right) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$$

Κανονας Αλυσιδας - Πεπλεγμενη Παραγωγιση

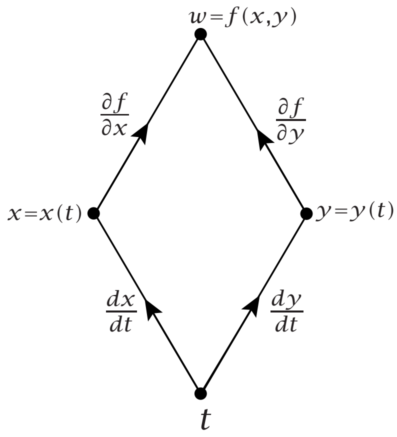
Υπενθυμίζουμε τον κλασσικό κανόνα αλυσίδας: αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς x και $x = x(t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t, τότε η σύνθεση $w(t) = f(x(t))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t και ισχύει

$$\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Έστω τώρα ότι $w = f(x,y)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και κάθε μια μεταβλητή, $x = x(t)$ και $y = y(t)$, είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t. Αν η f έχει μερικές παραγώγους ως προς x και y τότε

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

Παρατηρήστε στον παραπάνω τύπο ότι για τις συναρτήσεις $w(t), x(t)$ και $y(t)$ γίνεται χρήση του συμβόλου $\dfrac{d}{dt}$ διότι αυτές είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής t, ενώ για την $f(x,y)$ που είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, x και y, γίνεται χρήση του συμβόλου $\dfrac{\partial}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial}{\partial y}$.



Το διπλανό γράφημα δείχνει την μεταβλητή w να εξαρτάται μέσω της συνάρτησης f από τις μεταβλητές x και y οι οποίες στην συνέχεια εξαρτώνται από την μεταβλητή t. Θεωρώντας τους κλάδους που συνδέουν το t με το w μπορούμε εύκολα να γράψουμε τον τύπο (1).

Παράδειγμα 4: Έστω η συνάρτηση $w = f(x, y) = xy$. Ποιά είναι η παράγωγος ως προς t κατά μήκος της καμπύλης $(\cos t, \sin t)$ και ποιά η τιμή της στο $t = \pi/2$?

Έχουμε $x(t) = \cos t$ και $y(t) = \sin t$ οπότε

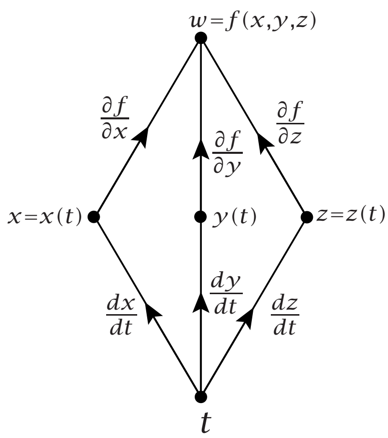
$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(xy)\frac{d(\cos t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\frac{d(\sin t)}{dt} \\ &= y(-\sin t) + x\cos t = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos(2t) \end{aligned}$$

και $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = [\cos(2t)]_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\pi = -1.$

Προφανώς, ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί, λόγω του απλούστατου τύπου της f, να γίνει εύκολα και χωρίς την χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

$$w(t) = (\cos t)(\sin t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \ \text{ και } \ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}(\sin(2t))' = \cos(2t).$$

Πανομοιότυπος είναι ο κανόνας της αλυσίδας για συναρτήσεις $w = f(x, y, z)$ τριών μεταβλητών



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

Παράδειγμα 5: Έστω η συνάρτηση $w = f(x, y, z) = x^4y + xz^3$. Να βρεθεί η παράγωγος ως προς t κατά μήκος του έλικα $(\cos t, \sin t, t)$ και η τιμή της στο $t = 0$.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(\cos t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d(\sin t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d(t)}{dt} = (4x^3y + z^3)(-\sin t) + x^4(\cos t) + 3xz^2 \cdot 1$$

$$= \left(4\cos^3 t \sin t + t^3\right)(-\sin t) + (\cos t)^4(\cos t) + 3(\cos t)t^2$$

$$= -4\cos^3 t \sin^2 t - t^3 \sin t + \cos^5 t + 3t^2 \cos t$$

και

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -4\cos^3 0 \sin^2 0 - 0 + \cos^5 0 + 0 = 1.$$

Εφαρμογή: Έστω α, β τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο. Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 που μας ενδιαφέρει έχουμε $\alpha(t_0) = 1m$, $\beta(t_0) = 3m$ και $\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0} = 2m/sec$ και $\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0} = -1m/sec$. Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν E, η περίμετρος S και το μήκος L των διαγωνίων του παραλληλογράμμου την χρονική στιγμή t_0;

Τα ζητούμενα μεγέθη δίνονται από τους εξής τύπους

$$E = E(\alpha, \beta) = \alpha\beta, \quad S = S(\alpha, \beta) = 2(\alpha + \beta) \quad \text{και} \quad L = L(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους $\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t_0}$, $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_0}$ και $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t_0}$ ως εξής:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t_0} = \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) = \beta(t_0)(2) + \alpha(t_0)(-1) = 6 - 1 = 5$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_0} = \frac{\partial(2(\alpha+\beta))}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial(2(\alpha+\beta))}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2$$

$$\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t_0} = \frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\partial\alpha}\left(\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t_0}\right) + \frac{\partial\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\partial\beta}\left(\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t_0}\right) = \left[\frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]_{t=t_0} \cdot (2) +$$

$$+ \left[\frac{2\beta}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]_{t=t_0} \cdot (-1) = 2\frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1^2+3^2}} - \frac{2 \cdot 3}{2\sqrt{1^2+3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Άρα την χρονική στιγμή t_0 το εμβαδόν και η περίμετρος μεγαλώνουν ενώ το μήκος της διαγωνίου μικραίνει.

Εφαρμογή: Έστω f διαφορίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών και η εξίσωση $f(x, y) = 0$ ορίζει το $y = y(x)$ ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x. Τότε από τον τύπο (1) έχουμε για το $w = f(x, y)$

$$\frac{dw}{dx} = f_x \cdot \frac{dx}{dx} + f_y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Το αριστερό μέλος της ισότητας μηδενίζεται (αφού $w = f(x, y) = 0$) και άρα

$$\text{εάν } f_y \neq 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Για παράδειγμα, αν η εξίσωση $y^2 - x^2 - \sin(xy) = 0$ ορίζει το y ως συνάρτηση του x τότε για την συνάρτηση $f(x,y) = y^2 - x^2 - \sin(xy)$ έχουμε

$$f_x = -2x - y\cos(xy) \text{ και } f_y = 2y - x\cos(xy)$$

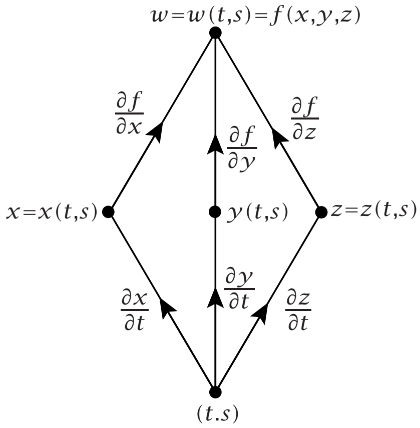
οπότε $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y} = \dfrac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΕ 2 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ

Έστω ότι $w = f(x,y)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και οι μεταβλητές $x = x(t,s), y = y(t,s)$ είναι συναρτήσεις δύο παραμέτρων t και s έτσι ώστε όλες οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}$$

να υπάρχουν. Αν η f έχει μερικές παραγώγους ως προς x και y τότε



$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

και πανομοιότυπα, για την περίπρωση 3 μεταβλητών $w = f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

Παράδειγμα 6: Για την συνάρτηση $w = f(x,y) = x^2 + y^2$ με $x(t,s) = t - s$ και $y(t,s) = t + s$, να βρεθεί η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ στο σημείο $(t,s) = (1,1)$.

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x\frac{\partial(t-s)}{\partial s} + 2y\frac{\partial(t+s)}{\partial s} = 2(t-s)(-1) + 2(t+s)1 = [4s]_{(1,1)} = 4.$$

Παράδειγμα 7: Για την συνάρτηση $w = f(x,y,z) = x + 2y + z^2$ με $x(t,s) = t/s$, $y(t,s) = t^2 + \ln s$ και $z(t) = 2t$, να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial w}{\partial t}$ και $\frac{\partial w}{\partial s}$.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 1\frac{\partial(t/s)}{\partial t} + 2\frac{\partial(t^2 + \ln s)}{\partial t} + 2z\frac{\partial(2t)}{\partial t} =$$
$$= \frac{1}{s} + 2(2t) + 2(2t)2 = \frac{1}{s} + 12t.$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 1\frac{\partial(t/s)}{\partial s} + 2\frac{\partial(t^2 + \ln s)}{\partial s} + 2z\frac{\partial(2t)}{\partial s}$$
$$= \frac{-t}{s^2} + 2\frac{1}{s} + 2t0 = \frac{2s - t}{s^2}.$$

Ασκήσεις

1. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$:
$f(x,y) = (xy-1)^2$ $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad f(x,y) = \frac{x+y}{xy-1}$ $\quad f(x,y) = \sin^2(x-3y)$.

2. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$:
$f(x,y,z) = e^{-xyz}$ $\quad f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$ $\quad f(x,y,z) = x\sin y\cos z$

3. Για τις παρακάτω συναρτήσεις επαληθεύστε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$:
$f(x,y) = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$ $\quad f(x,y) = \ln(2x+3y)$

4. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης για τις συναρτήσεις :
$f(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$ $\quad f(x,y) = \sin(xy)$

5. Αν η εξίσωση $xy + z^3x - 2yz = 0$ ορίζει το z ως συνάρτηση δύο ελεύθερων μεταβλητών x και y και η μερική παράγωγος $\frac{\partial z}{\partial x}$ υπάρχει, να βρεθεί η τιμή της στο σημείο $(1,1,1)$. [Απ: -2]

6. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$ και $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\cos 2x$ ικανοποιούν την διδιάστατη εξίσωση Laplace
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

7. Επαληθεύστε ότι οι συναρτήσεις
$$f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos 5z \qquad \text{και} \qquad f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
ικανοποιούν την τρισδιάστατη εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

8. Αν $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ και $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, z = 1/t$, βρείτε την παράγωγο $\frac{dw}{dt}$ στο σημείο $t = 3$. [Απ: 1]

9. Έστω $w = (x+y+z)^2$.

   (α) Αν $x = r-s, y = \cos(r+s), z = \sin(r+s)$, βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial w}{\partial r}$ στο σημείο $(r,s) = (1,-1)$. [Απ: 12]

   (β) Αν $x = ue^v\sin u, y = ue^v\cos u, z = ue^v$, βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial w}{\partial u}$ στο σημείο $(u,v) = (-2,0)$. [Απ: $4\pi - \pi^2$]

10. Τα μήκη α, β, γ των ακμών ορθογωνίου κιβωτίου μεταβάλλονται με το χρόνο. Την στιγμή που μας ενδιαφέρει

$$\alpha = 1m, \quad \beta = 2m, \quad \gamma = 3m, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = 1m/sec \quad \text{και} \quad \frac{d\gamma}{dt} = -3m/sec.$$

Με ποιό ρυθμό μεταβάλλεται ο όγκος V και το συνολικό εμβαδό S των εδρών του κιβωτίου; Μεγαλώνει ή μικραίνει το μήκος των εσωτερικών διαγωνίων;

$$\left[\text{Απ:}\quad \begin{array}{ll} V(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\beta\gamma & \dfrac{dV}{dt} = 3 \\ S(\alpha,\beta,\gamma) = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) & \dfrac{dS}{dt} = 0 \\ L(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{-6}{\sqrt{14}} \end{array}\right]$$

11. Έστω $T(x,y)$ η θερμοκρασία στο σημείο $(x,y) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ του μοναδιαίου κύκλου. Δίδεται ότι $\dfrac{\partial T}{dx} = 8x - 4y$ και $\dfrac{\partial T}{dy} = 8y - 4x$. Ένα μυρμήγκι κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Βρείτε όλα τα σημεία του κύκλου που το μυρμήγκι αισθάνεται (τοπικά) την χαμηλότερη και υψηλότερη θερμοκρασία.

$$\left[\text{Απ:}\quad \begin{array}{l} \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\partial T}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial T}{dy}\dfrac{dy}{dt} = (8\cos t - 4\sin t)(-\sin t) + (8\sin t - 4\cos t)(\cos t) \\ \qquad = 4(\sin^2 t - \cos^2 t) \\ \dfrac{dT}{dt} = 0 \iff \sin t = \pm\cos t \iff t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \text{ ή } t = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4} \\ \dfrac{d^2T}{dt^2} = 16\sin t\cos t \ \text{ και } \ \dfrac{d^2T}{dt^2} > 0 \iff t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \\ \qquad\qquad \dfrac{d^2T}{dt^2} < 0 \iff t = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4} \end{array}\right]$$