

Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #6

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ το οποίο το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$ και το λέμε παράγωγο της f στο x_0 .

Αντί του $f'(x_0)$ χρησιμοποιούνται συχνά και οι συμβολισμοί $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$ και $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη αν υπάρχει η παράγωγός της για κάθε $x_0 \in (a, b)$. Σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Μπορούμε, με βάση πάντα τον παραπάνω ορισμό, να εξετάσουμε αν η f' είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν είναι, τότε λέμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και συμβολίζουμε την δεύτερη παράγωγό της με f'' .

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ (παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων)

$$f(x) = c, c \text{ σταθερά, } x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = 0.$$

$$f(x) = x^n, n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = nx^{n-1}.$$

$$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = ax^{a-1}.$$

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = e^x.$$

$$f(x) = \log x, x > 0 \text{ τότε } f'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = \cos x.$$

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ τότε } f'(x) = -\sin x.$$

$$f(x) = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τότε } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ιδιότητες: Αν οι συναρτήσεις $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες τότε είναι παραγωγίσιμες και οι συναρτήσεις

(1) άθροισμα $f(x) + g(x)$ και ισχύει $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(2) διαφορά $f(x) - g(x)$ και ισχύει $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

(3) γινόμενο $f(x) \cdot g(x)$ και ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- (4) πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- (5) σύνθεση $g(f(x))$ και ισχύει $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$
(όταν ορίζεται)

Παραδείγματα εφαρμογής των ιδιοτήτων:

$$\cdot (\sqrt{x} + \sin x)' \stackrel{\text{Id.}(1)}{=} (x^{\frac{1}{2}})' + (\sin x)' = \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}-1}) + \cos x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x.$$

Η παράγωγος συνάρτηση $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη άρα η αρχική $\sqrt{x} + \sin x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η δεύτερη παράγωγός της είναι:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sin x)'' &= ((\sqrt{x} + \sin x)')' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x\right)' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}})' + (\cos x)' \\ &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \sin x = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \sin x. \end{aligned}$$

$$\cdot \left(\frac{\tan x - 1}{\cos x}\right)' \stackrel{\text{Id.}(4)}{=} \frac{(\tan x - 1)' \cos x - (\tan x - 1)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cos x - (\tan x - 1)(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

$$\cdot (e^{\sin x})' \stackrel{\text{Id.}(5)}{=} \frac{d(e^{\sin x})}{dx} \stackrel{\text{Id.}(5)}{=} \frac{d(e^{\sin x})}{d(\sin x)} \frac{d(\sin x)}{dx} = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x.$$

$$\cdot (\log \sqrt{x^2 + 1})' \stackrel{\text{Id.}(5)}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

ΚΑΝΟΝΑΣ L'HOPITAL Έστω $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $x_0 \in X$. Αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, εφ' όσον το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει.

Σημείωση: Ο κανόνας ισχύει και όταν το πεδίο ορισμού των f, g περιέχει διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ (αντίστ. $(-\infty, a)$) και $x \rightarrow +\infty$ (αντίστ. $x \rightarrow -\infty$).

Παράδειγμα 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (βλ. Πρόταση σελ. 5, ΚΕΦ.5)

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Παράδειγμα 2: Για το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Παράδειγμα 3: Μπορεί να απαιτηθεί η εφαρμογή του κανόνα L'Hopital περισσότερες από μία φορές: για το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Παράδειγμα 4: Σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται να "δημιουργήσουμε" πηλίκο συναρτήσεων προκειμένου να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει

$f'(x) > 0$ τότε f γνησίως αύξουσα στο (a, b)

$f'(x) \geq 0$ τότε f αύξουσα στο (a, b)

$f'(x) < 0$ τότε f γνησίως φθίνουσα στο (a, b)

$f'(x) \leq 0$ τότε f φθίνουσα στο (a, b)

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in (a, b)$ τότε $f'(x_0) = 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν έχει τοπικό ακρότατο στο 0 αλλά η παράγωγός της $f'(x) = 3x^2$ μηδενίζεται στο 0.

Αν η παράγωγος συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη τότε λέμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και την $(f')'$ την συμβολίζουμε με f'' και την λέμε δεύτερη παράγωγο της f .

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$.

(1) αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$ τότε f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

(2) αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$ τότε f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Παράδειγμα 5: Η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 + 2$ έχει παράγωγο $f'(x) = 2(x-1)$ που μηδενίζεται στο σημείο 1 και $f''(1) = 2 > 0$ συνεπώς παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη

στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 1-1 συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

όπου $y = f(x)$.

Παράδειγμα 6: Η συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Επίσης,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Από την προηγούμενη Πρόταση έπεται ότι παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι η συνάρτηση $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, διότι από τον τύπο έχουμε, για $y = \tan x$,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Εφαρμογή 7: Ναδειχθεί ότι $e^x \geq 1 + x, x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ η οποία έχει παραγώγους

$$f'(x) = e^x - 1 \text{ και } f''(x) = e^x.$$

Στο σημείο 0 έχουμε $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1 > 0$, άρα από το Θεώρημα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή, $0 = f(0) \leq f(x)$ για όλα τα σημεία x σε ένα διάστημα $(a, b) \ni 0$. Όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ διότι η παράγωγός της $f'(x) = e^x - 1 < 0$ για $x \in (-\infty, 0)$. Παρομοίως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ διότι η παράγωγός της $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για $x \in (0, +\infty)$. Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0, δηλαδή, $f(0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από όπου προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα

$$0 = f(0) \leq f(x) = e^x - x - 1 \implies e^x \geq 1 + x.$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$. [Απ: 0]

2. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$. [Απ: $+\infty$]

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1 και το ότι $e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$.

3. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. [Απ: -1 ολ. ελ., 1 ολ. μεγ.]

4. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = e^x - 2x$. [Απ: $\log 2$ ολικό ελάχιστο]

5. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά ή ολικά) και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = x^2 \log x$. [Απ: $1/\sqrt{e}$ ολικό ελάχιστο]

6. Να δείξετε ότι $\log(x+1) - \log x < 1/x, x > 0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Εφαρμογής 7 και το ότι η e^x είναι γνησίως αύξουσα.

7. Δείξτε ότι $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, x > 0$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ και δείξτε ότι $g'(x) > 0$ χρησιμοποιώντας την Εφαρμογή 7.

8. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανίσωση $e^x > 1 - x$? [Απ: $x > 0$]

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f(x) = e^x + x$.

9. Να δείξετε ότι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = e^{1-3x}$ και $f_2(x) = 2x - 5$ τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $h(x) = e^{1-3x} - 2x + 5$ και δείξτε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το \mathbb{R} . Στην συνέχεια χρησιμοποιήστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$