Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #5

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω X, Y σύνολα. Συνάρτηση $f : X \to Y$ από το X στο Y ονομάζουμε μια σχέση (ή αλλιώς κανόνα) που σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχίζει ένα μοναδικό $y \in Y$ το οποίο συμβολίζουμε με $f(x)$.

Το σύνολο X λέγεται **πεδίο ορισμού** και το Y **πεδίο τιμών.**

Το σύνολο $\{f(x) \mid x \in X\} \overset{\text{συμβολ.}}{\equiv} f(X) \subseteq Y$ ονομάζεται **εικόνα της** f.

Δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού X είναι **ίσες** αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ θα λέγεται **ένα προς ένα (1-1)** αν

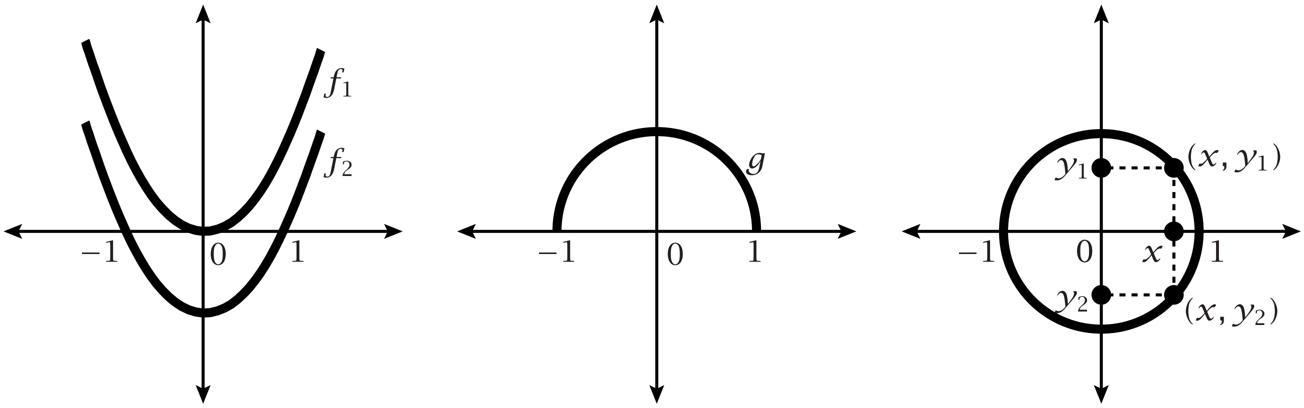
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ θα λέγεται **επί του Y** αν $f(X) = Y$, ή ισοδύναμα, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $y = f(x)$.

Παράδειγμα 1: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.
Η f δεν είναι επί αφού για το $y = -5$ δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x^2 = -5$.
Η f δεν είναι 1-1 αφού $f(-5) = 25 = f(5)$.
Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της f στο διάστημα $[0, +\infty)$ παίρνουμε μια άλλη συνάρτηση $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με ίδιο τύπο $g(x) = x^2$, η οποία είναι 1-1 και όχι επί. Η συνάρτηση g λέμε ότι είναι **περιορισμός** της f.
Η συνάρτηση $h : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ με $h(x) = x^2$ είναι και 1-1 και επί του $[0, +\infty)$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ θα λέγεται **πραγματική** αν $X \subseteq \mathbb{R}$ και $Y \subseteq \mathbb{R}$. Από εδώ και στο εξής η λέξη συνάρτηση θα σημαίνει πάντα πραγματική συνάρτηση.

Γραφική παράσταση: Έστω $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $y = f(x)$ ονομάζεται **γραφική παράσταση** ή **γράφημα** της f. Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζεται αριστερά η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_1(x) = x^2$, $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_2(x) = x^2 - 1$ και στην μέση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Δεξιά απεικονίζεται ο κύκλος που ως σύνολο σημείων του επιπέδου δεν είναι γράφημα συνάρτησης.



Σύνθεση συναρτήσεων: Έστω συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ με f επί. Η σύνθεση των f και g είναι η συνάρτηση

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \text{ με τύπο } (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Παράδειγμα 2: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$ και $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^3$. Τότε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^3$. ΠΡΟΤΑΣΗ Αν η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g : f(X) \longrightarrow X$ με την ιδιότητα για κάθε $x \in X$, $(g \circ f)(x) = x$ και για κάθε $y \in f(X), (f \circ g)(y) = y$. Η g λέγεται **αντίστροφη** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Παράδειγμα 3: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$.
Έχουμε $y = 2x + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y-1}{2}$ και η συνάρτηση $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

και

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y.$$

Παράδειγμα 4: $[0. + \infty) \longrightarrow [0. + \infty)$ με $f(x) = x^2$.
Έχουμε $y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y}$ και $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ θα λέγεται

αύξουσα αν για κάθε $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

γνησίως αύξουσα αν για κάθε $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

φθίνουσα αν για κάθε $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

γνησίως φθίνουσα αν για κάθε $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

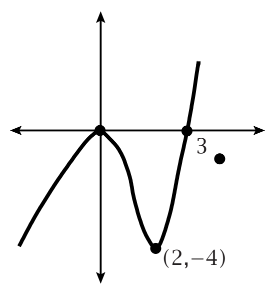
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{αν } x<0\\ x^2, & \text{αν } x\in[0,1]\\ 1, & \text{αν } x>1\end{cases}$
είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επίσης, είναι ταυτόχρονα και αύξουσα και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Στο διάστημα $(-\infty,1]$ δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα. Το ίδιο και στο $\mathbb{R}$.

> Μια συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ λέμε ότι έχει **τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{x_0}$** αν υπάρχει διάστημα $(a,b)\subset X$ με $x_0\in(a,b)$ έτσι ώστε $f(x_0)\geq f(x)$ για κάθε $x\in(a.b)$.
>
> Μια συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ λέμε ότι έχει **τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{x_0}$** αν υπάρχει διάστημα $(a,b)\subset X$ με $x_0\in(a,b)$ έτσι ώστε $f(x_0)\leq f(x)$ για κάθε $x\in(a.b)$.

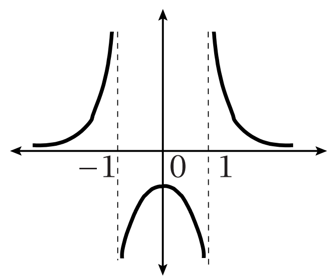
Τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f:X\to\mathbb{R}$ λέγονται τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f. Ανάλογα ορίζεται το ολικό μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο): η f έχει **ολικό μέγιστο** (αντ. **ελάχιστο**) στο x_0 αν $f(x_0)\geq f(x)$ (αντ. $f(x_0)\leq f(x)$) για κάθε $x\in X$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x^2-1$ έχει ολικό μέγιστο στο -1.

Παράδειγμα 5: Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2$.
της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.
Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών είναι όλο το $\mathbb{R}$.
Η f δεν είναι 1-1 αφού $f(0)=0=f(3)$. Επίσης η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 και τοπικό μέγιστο στο 0. Δεν υπάρχει ολικό ελάχιστο ή μέγιστο.



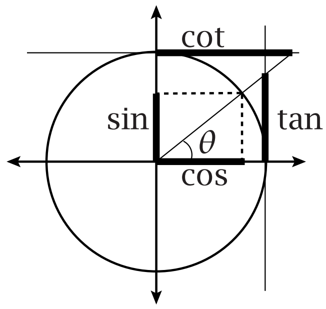
Παράδειγμα 6: Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.
Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ αφού $x^2-1=0\Leftrightarrow x=-1,1$.
Εικόνα της f: $(-\infty,-1]\cup(0,\infty)$ αφού $y=\frac{1}{x^2-1}\iff$
$x^2=\frac{y+1}{y}, y\neq 0\Longrightarrow(y+1)y>0\Longrightarrow y>0$ ή $y<-1$.



Η f δεν είναι επί του $\mathbb{R}$ και δεν είναι 1-1 (αφού $f(2)=1=f(-2)$). Έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 0$. Επίσης η f δεν έχει σε κανένα σημείο τοπικό ελάχιστο και ούτε έχει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο.

Σημειωτέον ότι η γραφική παράσταση της f και οι παραπάνω πληροφορίες δεν μπορούν να εξαχθούν με βάση τα μέχρι τώρα διδαχθέντα. Παρουσιάζονται μόνο ως παραδείγματα των εννοιών των ακροτάτων που δόθηκαν παραπάνω.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:



Οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

ημίτονο	$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
συνημίτονο	$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
εφαπτομένη	$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$
συνεφαπτομένη	$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$

όπου $k \in \mathbb{Z}$ ακέραιος, ορίζονται με χρήση του κύκλου ακτίνας 1 (τριγωνομετρικός κύκλος) για κάθε αριθμό (γωνία) $\theta \in [0, 2\pi)$. Γενικά, για $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός αριθμός $\theta_x \in [0, 2\pi)$ και ακέραιος k έτσι ώστε $x = 2k\pi + \theta_x$ και θέτουμε $f(x) = f(\theta_x)$ όπου f συμβολίζει κάθε μία από τις 4 τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Τα πεδία ορισμού και τιμών των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι αυτά που δίνονται παραπάνω. Καμία εκ των τεσσάρων δεν έχει την ιδιότητα να είναι 1-1. Όμως, περιορίζοντας κατάλληλα το πεδίο ορισμού μπορούμε να επιτύχουμε το 1-1. Για παράδειγμα, η εφαπτομένη είναι 1-1 όταν την περιορίσουμε στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και έτσι η συνάρτηση

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

έχει αντίστροφη που συμβολίζεται με $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ή $\tan^{-1}$.
Όμοια η συνάρτηση $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ είναι 1-1 και επί.

Εκθετική συνάρτηση: $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1, αύξουσα και το πεδίο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$. Η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση του λογαρίθμου $\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ΟΡΙΑ \& ΣΥΝΕΧΕΙΑ}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το **όριο** της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι a, και το συμβολίζουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, εάν οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης πλησιάζουν το a όταν το x πλησιάζει το x_0.

Παράδειγμα 7: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5x - 3$. Τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ διότι για x κοντά στο 1 οι τιμές $5x - 3$ είναι κοντά στο 2.

Σημείωση: Για τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Αρκεί να υπάρχουν σημεία x οσοδήποτε κοντά στο x_0 στα οποία να ορίζεται το $f(x)$.

ΑΥΣΤΗΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Έστω σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πεδίο ορισμού X της f να περιέχει ένα ανοικτό διάστημα της μορφής (x_0, C) ή (C, x_0). Θα λέμε ότι το **όριο** της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι a, και το συμβολίζουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - a| < \epsilon$.

Παράδειγμα 7: Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5x - 3$. Τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ διότι: για δοθέν $\epsilon > 0$ αναζητούμε $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon.$$

Θέλουμε $|f(x) - 2| = |(5x - 3) - 2| = 5\,|x - 1| < \epsilon$ οπότε, επιλέγοντας $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ έχουμε

$$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |(5x - 3) - 2| = 5\,|x - 1| < 5\frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

Παράδειγμα 8: Έστω η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{2x}$ όπου $X = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x})\,(1 + \sqrt{1 - x})}{2x\,(1 + \sqrt{1 - x})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x\,(1 + \sqrt{1 - x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\,(1 + \sqrt{1 - x})} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ισχύει ότι $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (απόδειξη αργότερα).

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Θα λέμε ότι η $f(x)$ είναι **συνεχής στο $\mathbf{x_0}$** όταν $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται με ενιαίο τύπο είναι συνεχείς.

Για παράδειγμα οι ακόλουθες συναρτήσεις

$$\begin{array}{ll} f(x) = c, c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά} & f(x) = \sin x \\ f(x) = x^m, m \text{ ακέραιος} & f(x) = \cos x \\ f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} & f(x) = \tan x \\ f(x) = e^x & f(x) = \cot x \\ f(x) = \log x & \end{array}$$

είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των.

Ιδιότητες: Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in X$. Τότε οι παρακάτω συναρτήσεις

$$\begin{array}{ll} \text{άθροισμα/διαφορά} & (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \\ \text{γινόμενο} & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ \text{πηλίκο} & (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \\ \text{σύνθεση} & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

όπου και όταν αυτές ορίζονται, είναι συνεχείς.

Παραδείγματα

(9) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x}$ ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 1]$ και είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα, στα σημεία $x = 1$ και -3 έχουμε

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -3} f(x) = f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = 2.$$

(10) Εξετάζουμε ως προς την συνέχεια την $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{2x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1/4 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

Οι συναρτήσεις $1-\sqrt{1-x}$ και $2x$ είναι συνεχείς άρα και το πηλίκο $\frac{1-\sqrt{1-x}}{2x}$ είναι συνεχής εκεί που ορίζεται, δηλαδή στο $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$. Άρα η g είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \neq 0$ του πεδίου ορισμού της $(-\infty, 1]$. Μένει να εξετάσουμε αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 0. Για να είναι συνεχής στο 0 θα πρέπει να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ και να ισούται με την τιμή της g στο 0, δηλαδή με το $g(0) = 1/4$. Στο Παράδειγμα 7 υπολογίσαμε αυτό το όριο και το βρήκαμε 1/4 συνεπώς η g είναι και στο 0 συνεχής.

(11) Έστω η συνάτηση $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\log x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

Αφού δίνεται το $h(0) = 0$, προφανώς, το πεδίο ορισμού της h είναι το

$[0,+\infty)$ και όχι το $(0,+\infty)$. Όπως προηγουμένως η συνάρτηση h είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in (0,+\infty)$. Εξετάζουμε την συνέχεια στο 0 υπολογίζοντας το $\lim_{x\to 0} h(x)$ ως εξής:

$$\left|\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\log x}\right| \leq \frac{\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{|\log x|} \leq \frac{1+1}{|\log x|} \to 0$$

αφού $\log x \to -\infty$ όταν το $x \to 0$ και άρα $|\log x| \to +\infty$ όταν το $x \to 0$. Άρα η h είναι συνεχής και στο 0.

Από προηγούμενη Πρόταση γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε ορίζεται η αντίστροφή της

$$f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}$$

και ισχύει η εξής

Πρόταση Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και συνεχής τότε και η αντίστροφη $f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Παραδείγματα

(12) Η συνάρτηση $f(x) = 1 - 2\log(1-x), x \in (-\infty, 1)$ είναι 1-1 διότι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \log(1-x_1) = \log(1-x_2) \overset{\log\ 1-1}{\Longleftrightarrow} 1 - x_1 = 1 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Αφού η f είναι συνεχής, η αντίστροφη συνάρτηση γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής πριν την υπολογίσουμε

$$y = 1 - 2\log(1-x) \Rightarrow \log(1-x) = \frac{1-y}{2} \Rightarrow 1 - x = e^{\frac{1-y}{2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = 1 - e^{\frac{1-y}{2}}.$$

(13) Η συνάρτηση $g(x) = e^{-2x} - 1, x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1 διότι

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow e^{-2x_1} - 1 = e^{-2x_2} - 1 \overset{[e^x\ 1-1]}{\Leftrightarrow} -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

και η αντίστροφή της είναι

$$y = e^{-2x} - 1 \Rightarrow e^{-2x} = y + 1 \Rightarrow -2x = \log(y+1) \Rightarrow x = -\frac{\log(y+1)}{2}$$

δηλαδή, $f^{-1}(x) = -\frac{\log(x+1)}{2}, x \in (-1,+\infty)$.

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση $f : X \to f(x) \subset \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1 τότε, παρ΄ όλο που δεν ορίζεται η αντίστροφη, έχει έννοια **η αντίστροφη εικόνα** ενός σημείου $b \in f(X)$ ή ενός συνόλου $B \subset f(X)$ ως εξής:

$$f^{-1}(b) = \{x \in X \mid f(x) = b\} \quad \text{και} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1 άρα δεν υπάρχει η αντίστροφη αλλά

$$f^{-1}(4) = \Big\{x \in X \mid x^2 = 4\Big\} = \{-2, 2\}$$

και

$$f^{-1}([4,25]) = \Big\{x \in X \mid 4 \leq x^2 \leq 25 \in B\Big\} = [-5,-2] \cup [2,5].$$

Θεωρημα (Ενδιαμεσης Τιμης) Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η εικόνα $f([a,b])$ της f είναι ένα κλειστό διάστημα $[\xi, \eta]$.
Ειδικώτερα, η εικόνα της f περιλαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$. Το ίδιο ισχύει για κάθε υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a,b]$.

Πορισμα I Μια συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει πάντα ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

Πορισμα II Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $a, b \in I$ και $f(a)f(b) < 0$ τότε υπάρχει σημείο $x_0 \in I$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.

Παραδείγματα

(14) Η εξίσωση $x^3 - 4x^2 - 65 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$:
Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,10]$ και ισχύει $f(0) \cdot f(10) = (-65) \cdot 535 < 0$. Άρα υπάρχει $x_0 \in [0,10]$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$ δηλαδή $x_0^3 - 4x_0^2 - 65 = 0$

(15) Λύση της εξίσωσης $\log x = \frac{1}{x} - 1$.
Προφανώς το $x = 1$ είναι λύση αφού $\log 1 = 0$. Εξετάζουμε αν υπάρχουν άλλες.
Η συνάρτηση $f(x) = \log x - \frac{1}{x} + 1$ ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα αφού

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 + \log x_1 < 1 + \log x_2 \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{array} \right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \log x_1 + 1 - \frac{1}{x_1} < \log x_2 + 1 - \frac{1}{x_2} \\ \text{και άρα } f(x_1) < f(x_2). \end{array}$$

Συνεπώς η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι το $x = 1$. Λύσεις στο $(-\infty, 0]$ δεν αναζητούμε διότι για $x < 0$ δεν ορίζεται ο λογάριθμος.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις και με χρήση του ορισμού να εξετάσετε αν είναι 1-1 :

   $f_1(x) = 2 - 2\log(x-1)$, $f_2(x) = -e^{-x} + e^x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$,

   $f_4(x) = 1 - 3\sin(2x)$, $f_5(x) = x^2 - x$. [Απ:f_4, f_5 όχι $1-1$]

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{3x}}$ είναι 1-1 και, αν ναι, να βρείτε την f^{-1}. [Απ: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{1-x}{x}\right)$]

3. Να εξετάσετε αν η $f(x) = 8x^3 + 1$ είναι 1-1 και να βρείτε το $f^{-1}(2)$. [Απ: $\frac{1}{2}$]

4. Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^2-5x+6}$. [Απ: $\frac{1}{6}, 4$]

5. Αν η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $A = (2,4)$ να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(3+e^{x-1}\right) = 2$. [Απ: $3+e^{x-1} = f(2) = 4 \Rightarrow x = 1$]

6. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3ax - 4 & \text{αν } x \neq 1 \\ 5 & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής. [Απ: $a = 3$]

7. Δείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x = 3$.
   Υπόδειξη: υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to 3} f(x)$ όταν $x < 3$ και όταν $x > 3$.

8. Αν $f(x) = x^3 - x^2 + x$ να δείξετε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(c) = 10$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 10$ με πεδίο ορισμού κατάλληλο $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και εφαρμόστε το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

9. Έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $e^x = 2 - 2x$? Αν ναι πόσες? [Απ: μία]
   Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι, με κοινό πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, μια γνησίως αύξουσα και μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μπορούν έχουν μόνο μια κοινή τιμή.

10. Να δείξετε ότι η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^5 + 8x$ και $g(x) = -e^x$ τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο $x_0 \in (-1, 0)$.
    Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ και, όπως στην άσκηση 9, δείξτε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία ακριβώς λύση.