Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #4

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ & ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Έστω $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.
Το **εσωτερικό γινόμενο** $u \cdot v$ ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Το **μέτρο** ενός διανύσματος $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ορίζεται ως

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Το μέτρο εκφράζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου ως εξής:

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{u_1 u_1 + \cdots + u_n u_n} = \sqrt{u \cdot u}.$$

Ιδιότητες Έστω $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llll} (1) & u \cdot v = v \cdot u & (3) & (\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v) \\ (2) & |u|^2 = u \cdot u & (4) & u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \end{array}$$

Το εσωτερικό γινόμενο μας επιτρέπει να υπολογίζουμε αλγεβρικά τριγωνομετρικούς αριθμούς με χρήση του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω u, v δύο μη μηδενικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και θ η γωνία που σχηματίζουν, όπου $\theta \in [0, \pi]$. Τότε

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\ |v|}.$$

Αφού $\theta = \pi/2$ είναι η μοναδική γωνία στο διάστημα $[0, \pi]$ που έχει συνημίτονο $= 0$, έπεται αμέσως ότι

ΠΟΡΙΣΜΑ Δύο μη μηδενικά διανύσματα u, v είναι κάθετα αν και μόνο αν $u \cdot v = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Να υπολογισθεί το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α$= (0, 0)$, Β$= (3, 5)$ και Γ$= (5, 2)$.

$$\cos\hat{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}}{\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\ \left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|} = \frac{(-5, -2) \cdot (-2, 3)}{\sqrt{25 + 4}\sqrt{4 + 9}} = \frac{(-5)(-2) + (-2)3}{\sqrt{29}\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{377}}.$$

Το εξωτερικό γινόμενο, σε αντίθεση με το εσωτερικό που ορίζεται στο $\mathbb{R}^n$ για κάθε $n \geq 1$, είναι μια πράξη μεταξύ δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ που δίνει αποτέλεσμα ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Το **εξωτερικό γινόμενο** $u \times v$ ορίζεται να είναι το διάνυσμα

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

όπου η κάθε συντεταγμένη είναι η ορίζουσα του αντίστοιχου 2×2 πίνακα, δηλαδή,

$$u \times v = \big(u_2 v_3 - v_2 u_3, -u_1 v_3 + v_1 u_3, u_1 v_2 - v_1 u_2 \big).$$

Ιδιότητες

(1) $u \times v = -v \times u$.

(2) Αν u, v μη μηδενικά διανύσματα τότε $u \times v \perp u$ και $u \times v \perp v$, δηλαδή, το διάνυσμα $u \times v$ είναι κάθετο και στο u και στο v.

(3) Αν u, v μη μηδενικά διανύσματα και $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία που σχηματίζουν τότε $|u \times v| = |u|\,|v| \sin\theta$, δηλαδή, το μέτρο του $u \times v$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα u, v.

(4) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.

(5) $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$.

Το γινόμενο $(u \times v) \cdot w$ ονομάζεται **μεικτό γινόμενο** των διανυσμάτων u, v, w και η απόλυτη τιμή του $|(u \times v) \cdot w|$ ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που καθορίζεται από τα διανύσματα u, v, w.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία $A = (2, -1, 2)$, $B = (-2, 3, 6)$ και $\Gamma = (0, 3, -3)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι το ήμισυ του εμβαδού του παραλληλογράμου που σχηματίζουν τα διανύσματα

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2, 3, 6) - (2, -1, 2) = (-4, 4, 4)$$

και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = (0, 3, -3) - (2, -1, 2) = (-2, 4, -5)$$

Συνεπώς λόγω της Ιδιότητας (3) έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} \right| = \tfrac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \left| (-36, -28, -8) \right| = \tfrac{\sqrt{2144}}{2} = \sqrt{536} \end{aligned}$$

Εφαρμογη Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που καθορίζεται από τα διανύσματα $u = (1, 2, -1), v = (-2, 0, 3)$ και $w = (0, 7, -4)$.

Υπολογίζουμε το μεικτό γινόμενο των διανυσμάτων u, v, w:

$$\begin{aligned}
u \cdot (v \times w) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \\
\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = \cdots = -23.
\end{aligned}$$

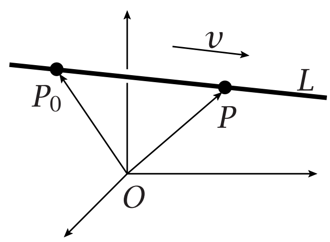
Συνεπώς, από την Ιδιότητα (5), ο ζητούμενος όγκος είναι

$$|u \cdot (v \times w)| = |-23| = 23$$

Εξισωση ευθειας στο $\mathbb{R}^3$

Έστω σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και διάνυσμα $v = (v_1, v_2, v_3)$. Η ευθεία L που διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι παράλληλη στο διάνυσμα v απαρτίζεται από όλα τα σημεία $P = (x, y, z)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{P_0P} = tu$, άρα

$$\begin{aligned}
P = (x, y, z) \equiv \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = (x_0, y_0, z_0) + tv \\
&= (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \\
&= (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, +z_0 + tv_3)
\end{aligned}$$



Συνεπώς οι **παραμετρικές εξισώσεις** της ευθείας που διέρχεται από το $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στην διεύθυνση του $v = (v_1, v_2, v_3)$ είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + tv_3 \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα: Έστω τα σημεία $A = (-3, 2, -3)$ και $B = (1, -1, 4)$. Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας L που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{AB} = (4, -3, 7)$ είναι

$$x = -3 + 4t, y = 2 - 3t, z = -3 + 7t \qquad (*)$$

Η ευθεία L' που διέρχεται από το B και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{AB} = (4, -3, 7)$ έχει εξισώσεις

$$x = 1 + 4t, y = -1 - 3t, z = 4 + 7t \qquad (**)$$

Προφανώς $L = L'$ και οι εξισώσεις $(*)$ και $(**)$ δίνουν το ίδιο σύνολο σημείων με διαφορετική όμως παράμετρο. Για παράδειγμα, για $t = 1$ έχουμε από τις $(*)$ το σημείο $\Gamma = (1, -1, 4)$ στην L. Το ίδιο σημείο $\Gamma = (1, -1, 4)$ στην L' δίνεται από τις εξισώσεις $(**)$ για την τιμή $t = 0$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΟ $\mathbb{R}^3$

Έστω σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\eta} = (a, b, c)$. Το επίπεδο που διέρχεται από σημείο P_0 και είναι κάθετο στο $\vec{\eta}$ απαρτίζεται από όλα τα σημεία $P = (x, y, z)$ για τα οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{P_0P}$ είναι κάθετο στο $\vec{\eta}$, ή ισοδύναμα, το εσωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{P_0P}$ και $\vec{\eta}$ μηδενίζεται, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{\eta} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{\eta} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο (a, b, c) είναι

$$ax + by + cz = d \quad \text{όπου} \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Παράδειγμα: Η εξίσωση του επιπέδου που καθορίζεται από τα σημεία $A = (0, 0, 1), B = (2, 0, 0)$ και $\Gamma = (0, 3, 0)$.

Βρίσκουμε πρώτα ένα διάνυσμα κάθετο στο ζητούμενο επίπεδο: γνωρίζουμε ότι το εξωτερικό $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ άρα κάθετο στο ζητούμενο επίπεδο. Υπολογίζουμε

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = (3, 2, 6).$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το $A = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ και είναι κάθετο στο $(3, 2, 6)$ είναι

$$3x + 2y + 6z = 3 \cdot \mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{0} + 6 \cdot \mathbf{1} = 6$$

<u>Σημείωση:</u> Αν χρησιμοποιούσαμε το σημείο $B = (\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ και τον διάνυσμα $(3, 2, 6)$ για την εύρεση της εξίσωσης του ζητουμένου επιπέδου θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα

$$3x + 2y + 6z = 3 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot \mathbf{0} + 6 \cdot \mathbf{0} = 6$$

Παράδειγμα: Έστω τα επίπεδα $P_1 : 3x - 6y + 2z = 15$ και $P_2 : 2x + y - 2z = 5$. Αφού τα εγκάρσια διανύσματα $\vec{\eta}_1 = (3, -6, 2)$ και $\vec{\eta}_2 = (2, 1, -2)$ δεν είναι παράλληλα, τα δύο επίπεπδα τέμνονται και το σύνολο τομής είναι μία ευθεία L. Οι εξισώσεις της ευθείας L βρίσκονται ως εξής:

Αφού η L περιέχεται στο P_1 θα είναι $L \perp \vec{\eta}_1$. Όμοια, έχουμε $L \perp \vec{\eta}_2$. Άρα η ευθεία L θα είναι κάθετη και στο $\vec{\eta}_1$ και στο $\vec{\eta}_2$, άρα παράλληλη με το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$ το οποίο υπολογίζουμε

$$\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = (10, 10, 15).$$

Άρα η ευθεία L είναι παράλληλη με το διάνυσμα $(10, 10, 15)$. Αρκεί τώρα να βρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο που να ανήκει στην L. Θέτουμε $z = 0$ στις εξισώσεις των δύο επιπέδων και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 6y & = & 15 \\ 2x + y & = & 5 \end{array} \right\} \implies \cdots \implies x = 3, y = -1.$$

Άρα το σημείο $(3, -1, 0)$ ανήκει στην L και άρα $L : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 + 10t \\ y & = & -1 + 10t \\ z & = & 15t \end{array} \right\}$.

Β΄ Τρόπος: Οι συντεταγμένες των σημείων του $\mathbb{R}^n$ που ανήκουν στην τομή των επιπέδων θα πρέπει να ικανοποιούν αμφότερες τις εξισώσεις $3x - 6y + 2z = 15$ και $2x + y - 2z = 5$. Άρα, αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 6y + 2z & = & 15 \\ 2x + y - 2z & = & 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 6y + 2z & = & 15 \\ 5y - \frac{10}{3}z & = & -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 13 + \frac{2}{3}\lambda \\ y & = & -1 + \frac{2}{3}\lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right\}.$$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις ποσότητες $u \cdot v$, $|u|$, $|v|$ και το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζουν τα u, v στις παρακάτω περιπτώσεις:

   (α) $u = (1, 0, 0), v = (0, 2, 0)$ (β) $u = (2, -4, \sqrt{5}), v = (-2, 4, -\sqrt{5})$
   (γ) $u = (5, -3, 0), v = (1, 1, 1)$ (δ) $u = (10, 11, -2), v = (0, 3, 4)$

   Απ: $u \cdot v = (\alpha)0, (\beta) - 25, (\gamma)2, (\delta)25$ $\cos\theta = (\alpha)0, (\beta) - 1, (\gamma)\frac{2}{\sqrt{102}}, (\delta)\frac{1}{3}$
   $|u| = (\alpha)1, (\beta)5, (\gamma)\sqrt{34}, (\delta)25$ $|v| = (\alpha)2, (\beta)5, (\gamma)\sqrt{3}, (\delta)5$

2. Να βρεθεί για ποιά x τα διανύσματα $u = (x + 1, 2, -1)$ και $v = (x, x, 4)$ είναι κάθετα μεταξύ τους. [Απ: $x = -4$ και $x = 1$]

3. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία A, B, Γ στις παρακάτω περιπτώσεις

   (α) $A = (1, -1, 2), B = (2, 0, -1), \Gamma = (0, 2, 1)$ [Απ: $2\sqrt{6}$]
   (β) $A = (2, -2, 1), B = (3, -1, 2), \Gamma = (3, -1, 1)$ [Απ: $\sqrt{2}/2$]

4. Ποιες από τις παρακάτω ιδιότητες αληθεύουν πάντα (δηλαδή αληθεύουν για κάθε $u, v, w \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$) και ποιές δεν αληθεύουν πάντα.

   (α) $u \times \vec{0} = \vec{0} \times u = \vec{0}$ (β) $u \cdot u = |u|$ (γ) $u \times v = v \times u$
   (δ) $\lambda(u \times v) = (\lambda u) \times v$ (ε) $(u \times v) \cdot v = 0$ (στ) $(u \times v) \cdot w = v \cdot (u \times w)$

   [Απ: (α), (δ), (ε) αληθεύουν πάντα]

5. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για την ευθεία που

   (α) διέρχεται από τα σημεία $A = (-2, 0, 3), B = (3, 5, -2)$.

   (β) διέρχεται από το σημείο $A = (3, -2, 1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 3t$.

   (γ) διέρχεται από το σημείο $A = (2, 4, 5)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x + 7y - 5z = 21$.

   Απ: [(α) $x = -2 + 5t, y = 5t, z = 3 - 5t$
   (β) $x = 3 + 2t, y = -2 - t, z = 1 + 3t$
   (γ) $x = 2 + 3t, y = 4 + 7t, z = 5 - 5t$]

6. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που

(α) διέρχεται από το σημείο $(1,1,1)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $2x + 5y - z = 12$.

(β) διέρχεται από τα σημεία $(1,1,-1,),(2,0,2)$ και $(0,-2,1)$.

(γ) διέρχεται από το σημείο $(2,4,5)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $x = 5 + t, y = 1 + 3t, z = 4t$.

(δ) περιέχει τις ευθείες $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{array}\right\}, t \in \mathbb{R}$ και $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + s \\ y = 4 + 2s \\ z = -1 - 4s \end{array}\right\}, s \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: εξετάστε πρώτα αν οι ευθείες τέμνονται.

Απ: $\left[\begin{array}{ll} (\alpha) & 2x + 5y - z = 6 \\ (\beta) & 7x - 5y - 4z = 6 \\ (\gamma) & x + 3y + 4z = 34 \\ (\delta) & \text{σημείο τομής } (1,2,3) \\ & -20x + 12y + z = 7 \end{array}\right]$