Συνοπτικές Σημειώσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α

Κεφάλαιο #3

ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η γενική μορφή ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} . \tag{1}$$

Λέμε ότι το σύστημα (1) έχει m εξισώσεις και n αγνώστους (τους $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Η λέξη «ομογενές» προσδιορίζει ότι το δεξιά μέλος όλων των εξισώσεων είναι 0. Συμβολίζουμε με A τον $m \times n$ πίνακα των συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Λύση για το σύστημα (1) είναι κάθε $n-$άδα πραγματικών αριθμών $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ για την οποία ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n = 0 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή οι λύσεις είναι διανύσματα $\vec{X} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ του $\mathbb{R}^n$ τα οποία γράφουμε ως μονόστηλους $n \times 1$ πίνακες. Συνεπώς, ένα ομογενές γραμμικό σύστημα **καθορίζεται μονοσήμαντα** από τον πίνακα των συντελεστών του ή, ισοδύναμα, από μια εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{0}}$$

όπου $\vec{0}$ είναι ο $m \times 1$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του 0 (δηλαδή, το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$).

Εύκολα επαληθεύεται ότι οι λύσεις του συστήματος δεν αλλάζουν εάν:

- πολλαπλασιάσουμε μία εξίσωση με ένα μη μηδενικό πραγματικό αριθμό
- προσθέσουμε μία εξίσωση σε μια άλλη

· αλλάξουμε την σειρά αναγραφής των εξισώσεων.

Οι παραπάνω 3 ενέργειες επιφέρουν τις εξής αλλαγές (αντίστοιχα) στον πίνακα συντελεστών A του συστήματος:

· πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη-μηδενικό αριθμό,

· πρόσθεση μιας γραμμής σε μια άλλη γραμμή

· εναλλαγή θέσης δύο γραμμών.

Γνωρίζουμε όμως ότι με τις τελευταίες 3 ενέργειες μπορούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα A σε κλιμακωτό. Συνεπώς, όταν μας δίνεται ένα ομογενές σύστημα όπως το (1), μετατρέπουμε τον πίνακα συντελεστών του σε κλιμακωτό γνωρίζοντας ότι οι λύσεις του συστήματος που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του αρχικού. Το πλεονέκτημα της μετατροπής σε κλιμακωτό έγκειται στο γεγονός ότι οι λύσεις ενός συστήματος που έχει κλιμακωτό πίνακα συντελεστών βρίσκονται άμεσα και εύκολα.

Παράδειγμα: Λύση του συστήματος $\begin{array}{rcl} 2y+3z &=& 0 \\ 3x-y+4z &=& 0 \\ 2x+4y-6z &=& 0 \end{array}$.

Για να αποφεύγουμε λάθη γράφουμε το σύστημα με όλους τους αγνώστους παρόντες σε κάθε εξίσωση και μετά σχηματίζουμε τον πίνακα συντελεστών του συστήματος:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathbf{0}x &+& \mathbf{2}y &+& \mathbf{3}z &=& 0 \\ \mathbf{3}x &+& (\mathbf{-1})y &+& \mathbf{4}z &=& 0 \\ \mathbf{2}x &+& \mathbf{4}y &+& (\mathbf{-6})z &=& 0 \end{array} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια μετατρέπουμε τον πίνακα A σε κλιμακωτό:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{7}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{47}{7} \end{pmatrix}$$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει τις ίδιες λύσεις με το $\begin{array}{rcl} 2x+4y-6z &=& 0 \\ -7y+13z &=& 0 \\ \frac{47}{7}z &=& 0 \end{array}$

το οποίο λύνεται άμεσα

$$\frac{47}{7}z = 0 \Longrightarrow z = 0, -7y+0 = 0 \Longrightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad 2x+0 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

δηλαδή το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση την τριάδα $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Σημείωση:</u> Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα την μηδενική λύση. Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν και άλλες μη μηδενικές λύσεις.

Παράδειγμα: Λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 6z + 4w &=& 0 \\ 2y + 3z + w &=& 0 \\ 3x - y + 4z + 2w &=& 0 \end{array} \right\}$.

Μετατρέπουμε τον πίνακα συντελεστών σε κλιμακωτό:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}r_1+r_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 13 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{7}{2}r_2+r_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{47}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 47 & -1 \end{pmatrix}$$

άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 6z + 4w &=& 0 \\ 2y + 3z + w &=& 0 \\ 47z - w &=& 0 \end{array} \right\}$

Στην εξίσωση $47z - w = 0$ μπορούμε να δώσουμε στο z οιαδήποτε τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ και λύνοντας απλές πρωτοβάθμιες εξισώσεις έχουμε

$$\begin{array}{rcccl} \boxed{z = \lambda} \text{ και } 47z - w = 0 & \Longrightarrow & \boxed{w = 47\lambda} & & \\ 2y + 3z + w = 0 & \Longrightarrow & 2y + 3\lambda + 47\lambda = 0 & \Longrightarrow & \boxed{y = -25\lambda} \\ 2x + 4y - 6z + 4w = 0 & \Longrightarrow & 2x + 4(-25\lambda) - 6\lambda + 4(47\lambda) = 0 & \Longrightarrow & \boxed{x = -41\lambda} \end{array}$$

Η γενική λύση (δηλαδή ΟΛΕΣ οι λύσεις) του συστήματος είναι της μορφής

$$\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} -41\lambda \\ -25\lambda \\ \lambda \\ 47\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -41 \\ -25 \\ 1 \\ 47 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Το λ ονομάζεται ελεύθερη μεταβλητή ή παράμετρος

Παράδειγμα: Λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z + 3w &=& 0 \\ x + 2y + 4z + 2w &=& 0 \\ 5y + 5z + w &=& 0 \\ x - 3y - z + w &=& 0 \end{array} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&4&2\\0&-5&-5&-1\\0&5&5&1\\0&-5&-5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&4&2\\0&-5&-5&-1\\0&0&0&0\\0&-5&-5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&2&4&2\\0&-5&-5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Η πρώτη ενέργεια της εναλλαγής σειράς των 2 πρώτων εξισώσεων έγινε μόνο για την διευκόλυνση των πράξεων (αποφυγή κλασμάτων).

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+4z+2w &=& 0\\ 5y+5z+w &=& 0\end{array}\right\}$

Στην εξίσωση $5y+5z+w=0$ μπορούμε να δώσουμε στα z,w οποιεσδήποτε τιμές $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και λύνοντας απλές πρωτοβάθμιες εξισώσεις έχουμε

$$\left.\begin{array}{r}\boxed{\begin{array}{c}z=\lambda\\ w=\mu\end{array}}\ \text{με } 5y+5z+w=0\\ x+2y+4z+2w=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c}5y+5\lambda+\mu=0\\ x+2(-\lambda-\tfrac{1}{5}\mu)+4\lambda+2\mu=0\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\boxed{y=-\lambda-\tfrac{1}{5}\mu}\\ \boxed{x=-2\lambda-\tfrac{8}{5}\mu}\end{array}$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\vec{X}_0=\begin{pmatrix}-2\lambda-\frac{8}{5}\mu\\ -\lambda-\frac{1}{5}\mu\\ \lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\lambda\\ -\lambda\\ \lambda\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\mu/5\\ -\mu/5\\ 0\\ \mu\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-8/5\\ -1/5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

δηλαδή τα (γραμμικά ανεξάρτητα) διανύσματα $\vec{X}_1=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ και $\vec{X}_2=\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ είναι λύσεις του αρχικού συστήματος καθώς επίσης και κάθε διάνυσμα που προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{X}_1,\vec{X}_2$

$$\lambda\vec{X}_1+\mu\vec{X}_2 \text{ για } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω ομογενές γραμμικό σύστημα $A\vec{X}=\vec{0}$ με m εξισώσεις και n αγνώστους. Αν η τάξη του πίνακα συντελεστών A είναι k (ισχύει αναγκαστικά ότι $k\le n$) τότε το σύστημα έχει $n-k$ το πλήθος λύσεις $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{n-k}$ οι οποίες, ως διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το σύνολο όλων των λύσεων του ομογενούς συστήματος (ορολογία: η γενική λύση) απαρτίζεται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots\vec{X}_{n-k}$, δηλαδή,

για κάθε $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ το διάνυσμα $\lambda_1\vec{X}_1+\lambda_2\vec{X}_2+\cdots+\lambda_{n-k}\vec{X}_{n-k}$ είναι λύση.

Παρατήρηση: Λέμε ότι κάθε λύση του συστήματος εκφράζεται συναρτήσει $n-k$ ελεύθερων παραμέτρων. Αν $n=k$ τότε το σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση.

Μη Ομογενη Γραμμικα Συστηματα

Η γενική μορφή ενός μη ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}. \tag{2}$$

και το σύστημα (όμοια με την περίπτωση του ομογενούς) γράφεται στην μορφή εξίσωσης πινάκων

$$A\vec{X}=\vec{b} \tag{3}$$

όπου

- A είναι ο $m\times n$ πίνακας συντελεστών,
- $\vec{X}$ συμβολίζει τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ που είναι λύσεις του (2) και
- $\vec{b}$ είναι το διάνυσμα $(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ του $\mathbb{R}^m$ το οποίο αναγράφουμε ως $m\times 1$ πίνακα. Υποθέτουμε $\vec{b}\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^m$ άλλως το (2) είναι ομογενές.

Θεωρούμε το (μοναδικά καθορισμένο) ομογενές γραμμικό σύστημα $A\vec{X}=\vec{0}$ που αντιστοιχεί στο σύστημα (2) και έστω $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n)$ μία λύση του ομογενούς.

Υποθέτοντας ότι υπάρχει μια λύση $\vec{c}=(c_1,c_2\ldots,c_n)$ του συστήματος (2), το διάνυσμα $\vec{\beta}+\vec{c}$ ικανοποιεί την εξίσωση πινάκων (3) διότι

$$A\left(\vec{\beta}+\vec{c}\right)=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

και άρα το διάνυσμα $\vec{\beta}+\vec{c}$ είναι επίσης λύση του (2). Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, κάθε λύση του (2) είναι της μορφής $\vec{\beta}+\vec{c}$ για κάποια λύση $\vec{\beta}$ του ομογενούς.

Συνεπώς, για να βρούμε όλες τις λύσεις του (2) πρέπει και αρκεί

- να βρούμε τις λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς (αυτό ξέρουμε να το κάνουμε) και
- να βρούμε **μια** συγκεκριμένη λύση του (2).

Για να επιτύχουμε ταυτόχρονα και τους δύο παραπάνω στόχους κάνουμε το εξής τέχνασμα: σχηματίζουμε έναν $m \times (n+1)$ πίνακα B του οποίου οι n πρώτες στήλες είναι οι στήλες του A και η $(n+1)-$στήλη του είναι τα στοιχεία του $\vec{b}$:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

και μετατρέπουμε τον B, που ονομάζεται επαυξημένος, σε κλιμακωτό.

Πρόταση Κάθε (μη ομογενές) γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο (δηλαδή, έχει τις ίδιες λύσεις) με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός.

Παράδειγμα: Λύση του συστήματος $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y-z+w &=& 1 \\ 3x-y-5z+2w &=& 3 \\ 10x-y-19z+7w &=& 11 \end{array}\right\}$.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 2 & 3 \\ 10 & -1 & -19 & 7 & 11 \end{array}\right)$ και τον μετατρέπουμε σε κλιμακωτό ως εξής:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 2 & 3 \\ 10 & -1 & -19 & 7 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 10 & -1 & -19 & 7 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{-5r_1+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 14 & -14 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4r_2+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Άρα, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y-z+w &=& 1 \\ 7y-7z+w &=& 3 \end{array}\right\}$

Στην εξίσωση $7y-7z+w=3$ μπορούμε να δώσουμε στα z, w οποιεσδήποτε τιμές $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και λύνοντας απλές πρωτοβάθμιες εξισώσεις έχουμε

$$\boxed{z=\lambda, w=\mu} \Longrightarrow \boxed{y=\lambda-\tfrac{1}{7}\mu+\tfrac{3}{7}} \quad \text{και} \quad \boxed{x=2\lambda-\tfrac{5}{7}\mu+\tfrac{8}{7}}$$

Δηλαδή η γενική λύση του δοθέντος συστήματος είναι τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ της μορφής

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2\lambda - \frac{5}{7}\mu + \frac{8}{7} \\ \lambda - \frac{1}{7}\mu + \frac{3}{7} \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{7}\mu \\ -\frac{1}{7}\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σημειωτέον ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\vec{X}_0 = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος και $\vec{c} = \left(\frac{8}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0\right)$ μια λύση του δοθέντος.

Παράδειγμα: Λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ 4x - y - z & = & 3 \\ 7x - 4y + 2z & = & 2 \end{array} \right\}$.

Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό με την συνήθη διαδικασία και βρίσκουμε τον πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό είναι αδύνατο λόγω της τρίτης εξίσωσης $0x+0y+0z = -4$. Άρα και το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

Ο ουσιαστικός λόγος ύπαρξης της εξίσωσης $0x+0y+0z = -4$ που καθιστά στο σύστημα αδύνατο είναι το γεγονός ότι η τάξη του πίνακα συντελεστών είναι 2 και η τάξη του επαυξημένου είναι 3.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω μη ομογενές γραμμικό σύστημα $A\vec{X} = \vec{b}$ με m εξισώσεις και n αγνώστους. Έστω $B = \left(A \mid \vec{b}\right)$ ο επαυξημένος πίνακας. Τότε

1. το σύστημα $A\vec{X} = \vec{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν η τάξη του πίνακα A ισούται με την τάξη του B.

2. Αν k είναι κοινή τιμή της τάξης των A και B τότε κάθε λύση του συστήματος εκφράζεται συναρτήσει $n - k$ ελεύθερων μεταβλητών.

3. Η γενική λύση $\vec{X}$ του μη ομογενούς συστήματος $A\vec{X} = \vec{b}$ είναι της μορφής

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{c}$$

όπου $\vec{X}_0$ είναι η γενική λύση του ομογενούς $A\vec{X} = \vec{0}$ και $\vec{c}$ μια λύση (οιαδήποτε) του μη ομογενούς.

Σημείωση: Για ένα γραμμικό σύστημα υπάρχουν ακριβώς τρεις αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

1. το σύστημα έχει μία μοναδική λύση,
2. το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο),
3. το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Η περίπτωση 2 αποκλείεται όταν το σύστημα είναι ομογενές.

Εφαρμογή: Για ποιά $\mu \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-4z &=& 1 \\ 2x+3y+z &=& 3 \\ 4x+7y+z &=& \mu \end{array}\right\}$ είναι αδύνατο, έχει μοναδική λύση, έχει άπειρες λύσεις;

Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & \mu \end{array}\right) \xrightarrow{-2r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & \mu \end{array}\right) \xrightarrow{-4r_1+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 17 & \mu-4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & \mu-7 \end{array}\right)$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα A του συστήματος είναι 3 και το ίδιο συμβαίνει για την τάξη του επαυξημένου πίνακα ανεξαρτήτως της τιμής του $\mu \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, με βάση το Θεώρημα, το σύστημα έχει λύση για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$. Αφού η κοινή τάξη είναι 3 και οι άγνωστοι είναι 3 το αντίστοιχο ομογενές έχει μόνο την μηδενική λύση και το δοθέν την μοναδική λύση:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-4z &=& 1 \\ y+9z &=& 1 \\ -10z &=& \mu-7 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{10}(7-\mu),\ \ y = 1-\frac{9}{10}(7-\mu),\ \ x = \frac{13}{10}(7-\mu).$$

Εφαρμογή: Για ποιά $\mu \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-4z &=& 1 \\ 2x+3y+z &=& 3 \\ 4x+7y+\mathbf{11}z &=& \mu \end{array}\right\}$ είναι αδύνατο, έχει μοναδική λύση, έχει άπειρες λύσεις;

Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 11 & \mu \end{array}\right) \xrightarrow{-2r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 11 & \mu \end{array}\right) \xrightarrow{-4r_1+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 27 & \mu-4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-7 \end{array}\right)$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα A του συστήματος είναι 2 αλλά η τάξη του επαυξημένου πίνακα εξαρτάται από την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $\mu \neq 7$ η τάξη του επαυξημένου είναι 3 και συνεπώς, με βάση το Θεώρημα, το σύστημα είναι αδύνατο. Αυτό είναι προφανές και από την μορφή της τρίτης εξίσωσης που είναι $0x + 0y + 0z = \mu - 7 \neq 0$.

Για την τιμή $\mu = 7$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που εκφράζονται συναρτήσει μιας $(3 - 2 = 1)$ ελεύθερης μεταβλητής:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-4z &=& 1 \\ y+9z &=& 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-4z &=& 1 \\ y+9z &=& 1 \\ \boxed{z=\lambda} && \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-4z=1 \\ y=1-9\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=13\lambda \\ y=1-9\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}.$$

Εφαρμογή: Για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y &=& 1 \\ \alpha x + y &=& \alpha^2 \end{array}\right\}$ είναι αδύνατο, έχει μοναδική λύση, έχει άπειρες λύσεις;

Πριν μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα $B = \left(A \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \\ \alpha^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \end{array}\right)$ σε κλιμακωτό παρατηρούμε ότι αν $\underline{\alpha = 0}$ τότε ο επαυξημένος πίνακας είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

με προφανή λύση την $y = 0, x = 1$ (σύμφωνα με το Θεώρημα η λύση είναι μοναδική αφού οι ταξεις των πινάκων A, B ισούνται με 2, όσοι είναι και οι άγνωστοι).

Αν $\alpha \neq 0$ με μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα B σε κλιμακωτό

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\alpha r_1 + r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & \alpha^2 - \alpha \end{array}\right)$$

Οι τάξεις των πινάκων A και B εξαρτώνται από την τιμή του α ως εξής:

$\underline{\alpha = 1}$ τότε τάξη$(A) = 1 =$ τάξη(B) και άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$\underline{\alpha = -1}$ τότε τάξη$(A) = 1$ και τάξη$(B) = 2$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

$\underline{\alpha \neq \pm 1}$ τότε τάξη$(A) = 2 =$ τάξη(B) και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{rcl} 2y-4z+3w & = & 0 \\ -2x+y-5w & = & 0 \\ 3x-y+2z & = & 0 \end{array}\right\}$. $\left[\text{Απ: } \lambda\left(-\frac{1}{2},4,\frac{11}{4},1\right)\right]$

2. Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & + & w & = & 0 \\ -x & + & 2y & & & + & w & = & 0 \\ x & + & 2y & & & - & 3w & = & 0 \end{array}\right\}$ $\left[\text{Απ: } (0,0,0,0)\right]$

3. Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{rcl} -x \quad +2z+5w & = & 3 \\ 3x+y-z+w & = & 2 \\ 2x+y+z+6w & = & 2 \end{array}\right\}$. $\left[\text{Απ: δεν έχει λύση}\right]$

4. Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{rl} 2x+6y+z+2w & =5 \\ 3y+z+4w & =1 \\ 3y+z+2w & =5 \end{array}\right\}$. $\left[\text{Απ: } \lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\3\\0\\-2\end{pmatrix}\right]$

5. Να εξετάσετε αν το σύστημα $\left\{\begin{array}{rl} x-y+z & =1 \\ 4x-y-z & =5 \\ 7x-4y+2z & =\alpha \end{array}\right\}$ έχει λύση όταν ο πραγματικός αριθμός α είναι $\neq 8$.
   Να λύσετε το ίδιο σύστημα όταν $\alpha=8$.

$$\left[\begin{array}{l} \alpha\neq 8 \quad \longrightarrow \text{τάξη}(A)\neq\text{τάξη}(B), \ \text{αδύνατο} \\ \alpha=8 \quad \longrightarrow \quad \text{άπειρες λύσεις}: \lambda\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} \end{array}\right]$$

6. Δίνονται τα συστήματα $\left\{\begin{array}{rl} 3x+2y+z & =0 \\ (\lambda+1)y+z & =0 \\ \lambda z & =0 \end{array}\right\}$ και $\left\{\begin{array}{rl} 3x+2y+z & =4 \\ \mu y+z & =3 \\ (\mu+1)z & =3 \end{array}\right\}$.
   Για ποιά $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ έχουν μοναδική, καμία, άπειρες λύσεις;

$$\left[\begin{array}{l} \lambda=-1 \ \text{ή} \ 0 \ \text{άπειρες}, \ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \ \text{μοναδική} \\ \mu=-1 \ \text{αδύνατο}, \ \mu=0 \ \text{άπειρες}, \ \mu\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \ \text{μοναδική} \end{array}\right]$$