Κεφάλαιο 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Πολλες γνωστες φυσικες εννοιες, οπως δυναμη, ταχυτητα, επιταχυνση, περιεχουν ενα μετρο (το μετρο της δυναμης, ταχυτητας, επιταχυνσης) καθως και μια διευθυνση. Καθε τετοια οντοτητα η οποια περιεχει μετρο και διευθυνση καλειται *διανυσμα.* Τα διανυσματα παριστανονται με βελη των οποιων το μηκος δεικνυει το μετρο και η διευθυνση του βελους ειναι η κατευθυνση του διανυσματος. Συνεπως, διανυσματα τα οποια εχουν το ιδιο μετρο και φορα θα θεωρουνται ισα ασχετα με τη θεση τους στο χωρο.

Στο κεφαλαιο αυτο θα ασχοληθουμε με τις βασικες εννοιες της Γραμμικης Αλγεβρας της οποιας η κυρια βαση ειναι τα διανυσματα. Θα ορισουμε την εννοια του Ευκλειδειου χωρου η οποια ειναι μια ειδικη περιπτωση του λεγομενου "διανυσματικου χωρου", και στη συνεχεια την εννοια του υποχωρου. Θα μιλησουμε για τη "φυσικη" απεικονιση μεταξυ ευκλειδειων χωρων ή υποχωρων και την αντιστοιχια αυτων με τους πινακες. Δυο εννοιες στενα συνδεδεμενες με τους πινακες ειναι αυτες της οριζουσας και των γραμμικων συστηματων. Τελος, θα αναφερθουμε στο *εσωτερικο* και *εξωτερικο* γινομενο διανυσματων, και σε μερικες εφαρμογες τους.

1.1 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

Καθενας απο μας ξερει την εννοια της ευθειας, του επιπεδου και του χωρου στον οποιον ζουμε και κινουμεθα. Αυτοι ειναι μερικα απο τα παραδειγματα Ευκλειδειων χωρων. Πιο συγκεκριμενα, οταν στο επιπεδο ορισουμε ενα σημειο O σαν την λεγομενη αρχη, και δοθεντος ενος αλλου σημειου A, τοτε μπορουμε να σχεδιασουμε ενα διανυσμα του οποιου η αρχη να ειναι το O και τελος το A και να το καλουμε $\overrightarrow{OA}$ ή $\vec{u}$. Τοτε, το συνολο ολων των διανυσματων του επιπεδου που οριζονται κατα αυτον τον τροπο ειναι ενα παραδειγμα ενος "διανυσματικου χωρου." Πιο αυστηρα εχουμε:

Ορισμος 1.1.1 *Εστω* $\mathbf{R}^n = \{\,\vec{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\,|\,x_i \in \mathbf{R}\}$. *Τοτε το συνολο* $\mathbf{R}^n$ *καλειται ο "Ευκλειδειος* n*–χωρος." Καθε στοιχειο* $\vec{u}$ *καλειται ενα πραγματικο διανυσμα.*

Σε αυτο το συνολο λοιπον μπορουμε να ορισουμε δυο πραξεις: (1) την προσθεση (+), και (2) τον αριθμητικο πολλαπλασιασμο $(\cdot)$ ως εξης:
Εστω διανυσματα $\vec{u} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \vec{v} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ και $\lambda \in \mathbf{R}$. Τοτε οριζουμε

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n)$$

και

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$$

Οι πραξεις αυτες ικανοποιουν τις ακολουθες ιδιοτητες για $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ και $a, b \in \mathbf{R}$:

1. $x + y = y + x$,
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3. Υπαρχει $0 \in \mathbf{R}^n$ ετσι ωστε $0 + x = 0$,
4. Για καθε $x \in \mathbf{R}^n$ υπαρχει $-x \in \mathbf{R}^n$ ετσι ωστε $x + (-x) = 0$,
5. $a(x + y) = ax + ay$,
6. $(a + b)x = ax + bx$,
7. $a(bx) = (ab)x$ και
8. $1x = x$.

Το συνολο $\mathbf{R}^n$ με αυτες τις πραξεις (δομη) καλειται ο "Πραγματικος Ευκλειδειος n–χωρος" ή απλα n–χωρος.

Παραδειγμα 1 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbf{R}\}$

Η Εννοια του Υποχωρου

Εστω τωρα $U = \{u = (x, y, z) \,|\, x - 2y + z = 0\}$. Το U ειναι ενα μη κενο (προφανως το $(0, 0, 0) \in U$) υποσυνολο του $\mathbf{R}^3$. Εστω οτι $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ να ανηκουν στο U και $\lambda \in \mathbf{R}$. Τοτε

$$x_1 - 2y_1 + z_1 = 0 \qquad \text{και} \qquad x_2 - 2y_2 + z_2 = 0$$

Προσθετοντας κατα μελη τις παραπανω δυο εξισωσεις, παιρνουμε

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \tag{1.1}$$

Παρομοια, παρατηρουμε οτι

$$(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1) + (\lambda z_1) = 0 \tag{1.2}$$

Οι (1.1) και (1.2) δηλωνουν οτι το (μη κενο) συνολο U ειναι **κλειστο** ως προς την προσθεση διανυσματων και τον αριθμητικο πολλαπλασιασμο, δηλαδη, δοθεντων δυο διανυσματων u_1 και u_2 στο U το αθροισμα τους, $u_1 + u_2 \in U$, ως επισης αν $\lambda \in R$, τοτε $\lambda u_1 \in U$. Στη πραγματικοτητα, το συνολο U, εκτος απο τις παραπανω ιδιοτητες, ικανοποιει ολες τις ιδιοτητες 1–8 που ικανοποιει ο n-χωρος. Ενα τετοιο ειδικο συνολο λοιπον ειναι ενα παραδειγμα του λεγομενου υποχωρου (του $\mathbf{R}^3$, εδω). Πιο γενικα, εχουμε:

Ορισμος 1.1.2 *Εστω U ενα μη κενο υποσυνολο του $\mathbf{R}^n$. Το U καλειται υποχωρος του $\mathbf{R}^n$ εαν*

1. *Αν $u, v \in U$, τοτε $u + v \in U$, και*
2. *Αν $u \in U$ και $\lambda \in \mathbf{R}$, τοτε $\lambda u \in U$.*

Παραδειγμα 2 *Εστω $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x - 3y = 0\}$. Αν $u_1 = (x_1, y_1)$ και $u_2 = (x_2, y_2)$ ανηκουν στο U, τοτε $2x_1 - 3y_1 = 0$ και $2x_2 - 3y_2 = 0$. Ετσι $2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0$ που σημαινει οτι το διανυσμα $u = u_1 + u_2 \in U$. Παρομοια, αν $\lambda \in \mathbf{R}$, και $u_1 \in U$, εχουμε $2(\lambda x_1) - 3(\lambda y_1) = 0$, και ετσι $\lambda u_1 \in U$. Συμφωνα λοιπον με τον ορισμο, ο U ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^2$.*

Παραδειγμα 3 *Εστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x - y + z = 0 \quad$ και $\quad 2x + y - 4z = 0\}$. Εφαρμοζοντας την ιδια τεχνικη, βλεπουμε οτι ο V ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^3$.*

Ας θεωρησουμε τωρα το εξης συνολο:

$$W = \{(x, y, z) \,|\, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\} \tag{1.3}$$

Ειναι το W υποχωρος του $\mathbf{R}^3$? Παρατηρουμε οτι αν u_1 και u_2 ανηκουν στο W, τοτε το $u = u_1 + u_2 \in W$. Ομως, το W <u>δεν ειναι</u> κλειστο ως προς τον αριθμητικο πολλαπλασιασμο, διοτι αν το $(x, y, z) \in W$ και $\lambda \in R$, το διανυσμα $\lambda(x, y, z)$ δεν ανηκει απαραιτητα στο W. Για παραδειγμα, το $(1, -1, 1) \in W$ αλλα το $(-1)(1, -1, 1) = (-1, +1, -1)$ δεν ανηκει στο W.

Λογω ακριβως των δυο συνθηκων του ορισμου ενος υποχωρου, ενα "τυχαιο" υποσυνολο του $\mathbf{R}^n$ δεν ειναι σχεδον <u>ποτε</u> υποχωρος του $\mathbf{R}^n$.

Παρατηρηση 1.1.1 *Εστω $V \subset U \subset R^n$ με V και U υποχωρους του $\mathbf{R}^n$, αντιστοιχα. Στη περιπτωση αυτη θα λεμε, επισης, οτι ο V ειναι υποχωρος του U.*

Σε αυτο το σημειο θα ηθελα να κανω την (προφανη) παρατηρηση—η οποια καλλιστα θα μπορουσε να θεωρηθει σαν μια *αναγκαια*, αλλα οχι *ικανη*, συνθηκη—οτι το μηδενικο διανυσμα $\vec{0}$ ανηκει παντα σε εναν υποχωρο. Με αλλα λογια, αν U ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^n$, τοτε το $(0, 0, \cdots, 0) \in U$.

Το επομενο θεωρημα σχετιζει την εννοια του υποχωρου με τις βασικες πραξεις μεταξυ συνολων.

Θεωρημα 1.1.1 *Εστω U και V υποχωροι του $\mathbf{R}^n$. Τοτε*

1. *Το $U \cap V$ ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^n$*
2. *Το $U \cup V$ ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^n$ εανν $U \subset V$ ή $V \subset U$*

Αποδειξη: 1. Εστω $a, b \in U \cap V$ και $\lambda \in \mathbf{R}$. Τοτε $a, b \in U$ και $a, b \in V$. Επειδη οι U και V ειναι υποχωροι του $\mathbf{R}^n$, θα εχουμε οτι $a + b \in U$ και $a + b \in V$, δηλαδη $a + b \in U \cap V$. Παρομοια, βλεπουμε οτι $\lambda a \in U \cap V$, και ετσι ο $U \cap V$ ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^n$.

2. ($\Longrightarrow$) Εστω $x \in U$. Αν το x ανηκει επισης στο V, τοτε η αποδειξη τελειωσε. Εστω λοιπον οτι το (συγκεκριμενο) $x \notin V$, και εστω y ενα (τυχαιο) στοιχειο του V. Θεωρουμε το διανυσμα $x + y$. Λογω του οτι ο $U \cup V$ ειναι υποχωρος, το $x + y \in U \cup V$, δηλαδη $x + y \in U$ ή $x + y \in V$. Αν, ομως, $x + y \in V$ τοτε το $(x + y) + (-y) \in V$ (γιατι ?), δηλαδη $x \in V$, ατοπο απο την υποθεση οτι το $x \notin V$. Αρα $x + y \in U$, το οποιο συνεπαγει οτι $y \in U$. Οθεν $y \in V \Longrightarrow y \in U$, δηλαδη, $V \subset U$. Παρομοια, μπορουμε να δειξουμε οτι αν $V \not\subset U$ τοτε $U \subset V$.

($\Longleftarrow$) Προφανες. ∎

Παραδειγμα 4 *Εστω $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, και $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - 4z = 0\}$. Θεωρουμε τον $W = V_1 \cap V_2$. Ευκολα μπορει να δειχτει οτι οι V_1 και V_2 ειναι υποχωροι του $\mathbf{R}^3$. Ετσι συμφωνα με το παραπανω θεωρημα ο W ειναι επισης υποχωρος του $\mathbf{R}^3$. Αυτο, βεβαια, συμφωνει με το Παραδειγμα* 3.

Απο την αλλη μερια, το $V_1 \cup V_2$ *δεν ειναι* υποχωρος του $\mathbf{R}^3$, διοτι (φανερα) το $V_1 \not\subset V_2$ και $V_2 \not\subset V_1$.

Γραμμικη Εξαρτηση και Ανεξαρτησια

Εστω $u_1, u_2, \cdots, u_k$ διανυσματα του V (υποχωρου του $\mathbf{R}^n$) και $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$. Επειδη το V ειναι κλειστο ως προς τις πραξεις της προσθεσης και του αριθμητικου πολλαπλασιασμου, το διανυσμα

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

θα ανηκει επισης στο V. Αντιστροφα τωρα, αν $v \in V$ κατω απο ποιες συνθηκες (αν υπαρχουν) το v μπορει να γραφει σαν

$$v = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \cdots + \rho_k u_k$$

για καποια $\rho_i \in \mathbf{R}$?

Το παραπανω ερωτημα θα απαντηθει (μερικως) απο τον ακολουθο ορισμο:

Ορισμος 1.1.3 *Εστω B ενα μη κενο υποσυνολο του $\mathbf{R}^n$. Ενα διανυσμα $u \in \mathbf{R}^n$ θα καλειται ενας γραμμικος συνδυασμος* στοιχειων του B εαν υπαρχει ενας πεπερασμενος αριθμος διανυσματων $b_1, b_2, \cdots, b_k \in B$ και $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ ετσι ωστε

$$u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_k b_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$$

Παραδειγμα 5 *Εστω $B = \{(1,2)\} \subset R^2$, και εστω $u = (x,y) \in R^2$. Να βρεθει η <u>αναγκαια</u> και <u>ικανη</u> συνθηκη (ως προς x και y) ετσι ωστε το u να ειναι γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του B.*

Λυση: Για να ειναι το u γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του B, θα πρεπει να υπαρχει $\lambda \in \mathbf{R}$ ετσι ωστε $u = (x,y) = \lambda(1,2)$, δηλαδη, $x = \lambda$ και $y = 2\lambda$. Οθεν, υπαρχει η σχεση $y = 2x$, ή, $y - 2x = 0$. Η τελευταια αποτελει μια αναγκαια συνθηκη για να ειναι το $u = (x,y)$ γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του B. Ειναι η ιδια αυτη συνθηκη επισης ικανη? Η απαντηση ειναι ναι, διοτι αν τα x, y ικανοποιουν την $y - 2x = 0$, τοτε μπορουμε να γραψουμε $u = (x,y) = (x, 2x) = x(1,2)$, δηλαδη το u ειναι γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του B. Αρα, αν $U = \{u = (x,y) \mid$ το u να ειναι γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του $B\}$, τοτε $U = \{(x,y) \in R^2 \mid y - 2x = 0\}$. Η τελευταια εκφραση του U ευκολα αναγνωριζεται σαν ενας υποχωρος του $\mathbf{R}^2$. Γραφικα, το U ειναι μια ευθεια που διερχεται απο το $(0,0)$, με κλιση 2. ■

Παραδειγμα 6 *Εστω $B = \{(1,0,-1),(0,1,2)\} \subset \mathbf{R}^3$, και εστω $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Να βρεθει η αναγκαια και ικανη συνθηκη ετσι ωστε το u να ειναι γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του B.*

Παρομοια με το Παραδειγμα 5, θα εχουμε

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(0,1,2) = (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

ή

$$x = \lambda_1, y = \lambda_2, z = -\lambda_1 + 2\lambda_2$$

Η παραπανω σχεση μας δινει την

$$z = -x + 2y \iff -x + 2y - z = 0 \tag{1.4}$$

και η οποια ειναι μια αναγκαια συνθηκη για να ειναι το διανυσμα $u = (x, y, z)$ ενας γραμμικος συνδιασμος του (των στοιχεων) B. Θα δειξουμε τωρα οτι αυτη η συνθηκη ειναι επισης ικανη. Εστω λοιπον $v = (a, b, c)$ με την ιδιοτητα $-a + 2b - c = 0$. Τοτε, $v = (a, b, c) = (a, b, -a + 2b) = (a, 0, -a) + (0, b, 2b) = -a(1, 0, -1) + b(0, 1, 2)$. Αυτη η τελευταια σχεση δειχνει την αληθεια του ισχυρισμου. Συνεπως, αν

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -x + 2y - z = 0\}$$

τοτε, τα διανυσματα του $\mathbf{R}^3$ τα οποια ειναι γραμμικοι συνδυασμοι του B ειναι ακριβως (και μονον αυτα) τα στοιχεια του U. Ξανα, βλεπουμε οτι το U ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^3$, ενα επιπεδο βεβαια που διερχεται απο το σημειο $(0, 0, 0)$. ∎

Ο επομενος ορισμος ειναι φυσικη συνεπεια της ιδεας των παραπανω δυο παραδειγματων.

Ορισμος 1.1.4 *Εστω B ενα υποσυνολο του $\mathbf{R}^n$. Τοτε οριζουμε το παραγομενο συνολο $S(B)$ σαν ακολουθα:*

1. *Αν το $B = \emptyset$, τοτε οριζουμε $S(B) = \{(0, 0, \cdots, 0)\}$*
2. *Αν $B \neq \emptyset$, τοτε το $S(B)$ αποτελειται απο ολους τους (πεπερασμενους) γραμμικους συνδυασμους των στοιχειων του B, δηλαδη,*

$$S(B) = \{u \in R^n \mid u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j, \quad b_j \in B, \, \lambda_j \in R, \, k \geq 1\}$$

Παρατηρηση 1.1.2 *Το $S(B)$ ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^n$.*

Αποδειξη: Πρωτα παρατηρουμε οτι $S(B) \neq \emptyset$. Απο την αλλη μερια, αν $u, v \in S(B)$, τοτε

$$u = \sum \lambda_i b_i \qquad \text{και} \qquad v = \sum l_j b_j$$

Ετσι λοιπον, $u + v \in S(B)$, και $\lambda u \in S(B)$, δηλαδη, το $S(B)$ ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^n$. ∎

Το συνολο B καλειται "γεννητορας" του (υποχωρου) $S(B)$ ή, εναλλακτικα, θα λεμε οτι το $S(B)$ *παραγεται* απο το B, $[S(B) := \mathrm{Span}(B)]$.

Στα τελευταια δυο παραδειγματα ειδαμε τους παραγομενους χωρους του συνολου B. Ας δουμε τωρα ενα επιπλεον παραδειγμα—το οποιο αν και τετριμμενο—εχει μια σημαντικη σπουδαιοτητα στα επομενα.

Παραδειγμα 7 *Εστω $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbf{R}^3$. Τοτε $S(B) = \mathbf{R}^3$.*

Αποδειξη: Προφανως, $S(B) \subset \mathbf{R}^3$. Απο την αλλη μερια ομως, αν $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, τοτε παρατηρουμε οτι

$$u = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

και ετσι το $u \in S(B)$, δηλαδη, $\mathbf{R}^3 \subset S(B)$. Οθεν, $S(B) = \mathbf{R}^3$. ∎

Παρομοια, αν ονομασουμε $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$ $e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ και θεωρησουμε το υποσυνολο $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ του $\mathbf{R}^n$, βλεπουμε οτι

$$S(B) = S(\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}) = \mathbf{R}^n \tag{1.5}$$

Ολοκληρος ο $\mathbf{R}^n$ λοιπον, ειναι δυνατον να παραχθει απο τα n διανυσματα $e_1, e_2, \cdots, e_n$.

Τελειωνουμε αυτη τη παραγραφο με την παρατηρηση οτι αν το συνολο B παραγει τον υποχωρο V, δηλαδη, αν $V = S(B)$, τοτε *καθε* υπερσυνολο C του B, δηλαδη, καθε συνολο $C \supset B$, θα παραγει επισης τον V, δηλαδη, $S(C) = V$.

Εστω V ενας υποχωρος του $\mathbf{R}^n$, ο οποιος παραγεται απο το συνολο B, το οποιο μπορει να ειναι πεπερασμενο ή απειρο. Ενα ευλογο (και συναμα υπολογιστικο) ερωτημα ειναι: "Μπορει ο V να παραχθει απο ενα γνησιο υποσυνολο του B?" ή "υπαρχει ενα "ελαχιστο" υποσυνολο του B το οποιο θα παραγει τον V?"

Ενα πρωτο βημα για την απαντηση των παραπανω ερωτησεων ειναι ο ακολουθος ορισμος:

Ορισμος 1.1.5 *Εστω $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ ενα πεπερασμενο συνολο διανυσματων του $\mathbf{R}^n$. Θα λεμε οτι*

1. *Το A (ή τα διανυσματα $v_1, \cdots, v_k$) ειναι γραμμικα ανεξαρτητο(α) ($ΓA$),* αν οποτεδηποτε εχουμε μια σχεση της μορφης

   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \vec{0}$$

   τοτε *<u>ολοι</u>* οι συντελεστες λ_i θα ειναι ισοι με 0, δηλαδη, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Εναλλακτικα, τα $v_1, v_2, \cdots, v_k$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, αν το μηδενικο διανυσμα μπορει να γραφει *<u>μοναδικα</u>* σαν γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του A.

2. Το A (ή τα διανυσματα $v_1, \cdots, v_k$) ειναι *γραμμικα εξηρτημενο(α)*, ($ΓE$) αν υπαρχουν (συγκεκριμενα) $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_k$, οχι *ολα* μηδεν, ετσι ωστε

   $$\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \cdots + \rho_k v_k = \vec{0}$$

Ας παρατηρησουμε τα ακολουθα πριν προχωρησουμε σε παραδειγματα. Εστω παλι $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ ενα πεπερασμενο υποσυνολο του $\mathbf{R}^n$.

1. Αν το A ειναι ΓA, τοτε αναγκαια $v_i \neq \vec{0}$, $\forall i$ (Γιατι?).
2. Το A ειναι ΓA εανν κανενα απο τα v_i δεν ειναι γραμμικος συνδυασμος των υπολοιπων. Συμβολικα, το A ειναι $\Gamma A \iff v_i \notin S(A - v_i)\ \forall i$.
3. Αν το A ειναι ΓE, τοτε καποιο απο τα v_j ειναι γραμμικος συνδυασμος των υπολοιπων.

Αποδειξη: 2. ($\Longrightarrow$) (μονον εαν) (αναγκαια): Αν $v_i = \lambda_1 v + \cdots + \lambda_{i-1}v_{i-1} + \lambda_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \lambda_k v_k$, τα λ_i δεν μπορει να ειναι ολα μηδεν, διοτι τοτε θα ειχαμε $v_i = \vec{0}$ (το οποιο ερχεται σε αντιθεση με το 1). Αλλα, η παραπανω σχεση αντικειται στην υποθεση της γραμμικης ανεξαρτησιας.

($\Longleftarrow$) (εαν) (ικανη): Αν καποιο απο τα v_i ειναι γραμμικος συνδυασμος, αυτο αντικειται, παλι, στην συνθηκη της γραμμικης ανεξαρτησιας. ∎

Παραδειγμα 8 *Ελεγξτε αν το* $A = \{(1,0,1),(0,1,-1),(2,1,1)\}$ *ειναι* ΓA *ή* ΓE.

Εχουμε $a(1,0,1) + b(0,1,-1) + c(2,1,1) = (0,0,0)$, το οποιο ειναι ισοδυναμο με

$$\begin{aligned} a \qquad + 2c &= 0 \\ + b + \ c &= 0 \\ a - b + \ c &= 0 \end{aligned}$$

Το τελευταιο συστημα ειναι ισοδυναμο με το ακολουθο:

$$\begin{aligned} a \qquad + 2c &= 0 \\ a - b + \ c &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ομως, το συστημα (1.6) εχει απειρες λυσεις. Για παραδειγμα, $a = -2$, $b = -1$, και $c = 1$ ειναι μια λυση του (1.6), και ετσι το A ειναι ΓE. ∎

Παραδειγμα 9 *Ειναι το* $A = \{(1,2),(0,1)\} \Gamma A$?

Στη περιπτωση αυτη εχουμε οτι αν $a(1,2) + b(0,1) = (0,0)$, τοτε

$$\begin{aligned} a + \quad &= 0 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned}$$

του οποιου η λυση ειναι $a = 0$, και $b = 0$. Ετσι λοιπον το A ειναι ΓA. ∎

Εφοδιασμενοι με αυτα τα εργαλεια, ειμαστε τωρα σε θεση να προχωρησουμε σε δυο βασικες εννοιες οι οποιες αφορουν υποχωρους.

Βαση και Διασταση

Ορισμος 1.1.6 *Εστω V ενας υποχωρος του $\mathbf{R}^n$. Ενα υποσυνολο $\mathbf{B}$ του V θα καλειται βαση του V εανν:*

1. *Το $\mathbf{B}$ ειναι ΓΑ, και*
2. *Το $\mathbf{B}$ παραγει τον V, δηλαδη, $V = S(\mathbf{B})$.*

Ετσι λοιπον η εννοια της βασης ερχεται να απαντησει στο ερωτημα που ετεθη στη αρχη της προηγουμενης παραγραφου. Μια βαση ενος υποχωρου V ειναι ενα συνολο, “αρκετα μεγαλο” ωστε να παραγει τον V, αλλα “αρκετα μικρο” να ειναι *ΓΑ*.

Ας δουμε μερικα παραδειγματα βασεων:

Παραδειγμα 10 *I. Αν $\mathbf{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, τοτε το $\mathbf{B}$ ειναι βαση του $\mathbf{R}^2$.*

Εχουμε οτι το $\mathbf{B}$ ειναι (προφανως) *ΓΑ*, με κατευθειαν εφαρμογη του ορισμου. Εξαλλου, αν $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, τοτε $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, και αρα το $\mathbf{B}$ παραγει τον $\mathbf{R}^2$. Η βαση αυτη λεγεται και <u>*κανονικη*</u> βαση του $\mathbf{R}^2$.

II. Πιο γενικα, αν $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, τοτε το $\mathbf{B}$ ειναι η *κανονικη* βαση του $\mathbf{R}^n$.

Παραδειγμα 11 *Ειναι το $\mathbf{A} = \{(1,2),(3,5)\}$ βαση του $\mathbf{R}^2$?*

Για να απαντησουμε στη παραπανω ερωτηση, θα πρεπει να δειξουμε οτι το $\mathbf{A}$ ειναι *ΓΑ* και οτι επισης παραγει τον $\mathbf{R}^2$. Εχουμε λοιπον οτι αν $a(1,2) + b(3,5) = (0,0) \implies a + 3b = 0$, και $2a + 5b = 0$. Η λυση αυτων των ταυτοχρονων εξισωσεων ειναι η $a = b = 0$, και αρα το $\mathbf{A}$ ειναι *ΓΑ*.

Απο την αλλη μερια, εστω $u = (x,y)$ ενα τυχαιο διανυσμα του $\mathbf{R}^2$. Μπορει το (x,y) να γραφει σαν ενας γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του $\mathbf{A}$? Εχουμε λοιπον, $(x,y) = a(1,2) + b(3,5)$, το οποιο ειναι ισοδυναμο με το

$$\begin{aligned} a + 3b &= x \\ 2a + 5b &= y \end{aligned}$$

απο το οποιο παιρνουμε οτι $a = -5x + 3y$ και $b = 2x - y$. Ετσι λοιπον, το $\mathbf{A}$ ειναι βαση του $\mathbf{R}^2$.

Παραδειγμα 12 *Εστω $\mathbf{R}^3 \supset V = \{(x,y,z) \,|\, 2x - y + z = 0\}$. Να βρεθει μια βαση του V.*

Λυση: Ποσους βαθμους ελευθεριας (επιλογης) εχουμε για τα x, y, z στην εξισωση $2x - y + z = 0$? Βλεπουμε οτι, για παραδειγμα, μπορουμε ελευθερα να επιλεξουμε τα x, y και τοτε το z εξαρταται απο τα x, y απο την $z = y - 2x$. Συνεπως, εχουμε 2 βαθμους ελευθεριας, και αν θεσουμε $x = t, y = s$, και $z = s - 2t$, εχουμε

$$(x, y, z) = (t, s, s - 2t) = (t, 0, -2t) + (0, s, s) = t(1, 0, -2) + s(0, 1, 1) \quad (1.7)$$

Θετοντας $\mathbf{B} = \{(1, 0, -2), (1, 1, 1)\}$, παρατηρουμε οτι η (1.7) μας λεει οτι $V = S(\mathbf{B})$. Ισχυριζομαστε επισης οτι το $\mathbf{B}$ ειναι ΓΑ, διοτι αν $a(1, 0, -2) + b(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow a = b = 0$. Οθεν, το $\mathbf{B}$ ειναι μια βαση του V. ■

Με το ιδιο σκεπτικο, αν θεσουμε $x = t, z = s$, βλεπουμε οτι $(x, y, z) = (t, 2t+s, s) = t(1, 2, 0) + s(0, 1, 1)$, και συνεπως το $\mathbf{A} = \{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ ειναι επισης μια βαση του V. Ας παρατηρησουμε εδω οτι, $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| = 2$.

Παραδειγμα 13 *Εστω* $W = \{(x, y, z) \,|\, x - y + z = 0 \text{ και } x + 2y - z = 0\}$. *Ειναι γνωστον οτι ο* W *ειναι υποχωρος του* $\mathbf{R}^3$. *Ας βρουμε μια βαση αυτου του υποχωρου.*

Λυση: Ποσους βαθμους ελευθεριας εχουμε στη προκειμενη περιπτωση? Δεν μπορουμε να εχουμε δυο, διοτι αν π.χ. θεσουμε $x = t$ και $z = s$, τοτε θα εχουμε αντιφαση. Ας θεσουμε λοιπον $x = t$. Τοτε εχουμε:

$$\begin{matrix} -y + z = -t \\ 2y - z = -t \end{matrix} \quad ή \quad \begin{matrix} y \quad = -2t \\ -y + z = -t \end{matrix} \quad ή \quad \begin{matrix} y = -2t \\ z = -3t \end{matrix}$$

Ετσι λοιπον το “τυχαιο” (x, y, z) το οποιο ανηκει στον W θα γραφεται σαν $(x, y, z) = (t, -2t, -3t) = t(1, -2, -3)$, και συνεπως ειναι φανερο οτι το $\mathbf{B} = \{(1, -2, -3)\}$ ειναι μια βαση του W. ■

Το παρακατω θεωρημα ειναι ενα απο τα πρωταρχικα της Γραμμικης Αλγεβρας, και το παραθετουμε χωρις αποδειξη.

Θεωρημα 1.1.2 *Εστω* V *ενας υποχωρος του* $\mathbf{R}^n$ *και εστω* $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ *δυο βασεις του* V. *Τοτε* $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

Με βαση το Θεωρημα 1.1.2, μπορουμε να διατυπωσουμε τον κατωθι ορισμο:

Ορισμος 1.1.7 *Εστω* V *υποχωρος του* $\mathbf{R}^n$ *και* $\mathbf{B}$ *μια βαση του* V. *Τοτε, οριζουμε σαν τη διασταση του* V, $dim\,(V) = |\mathbf{B}|$.

Τι ειναι λοιπον μια βαση ενος υποχωρου V του $\mathbf{R}^n$? Μιλωντας χοντρικα θα μπορουσαμε να πουμε οτι, μια βαση ειναι το “μεγαλυτερο” δυνατο ΓΑ υποσυνολο του V (το οποιο, αναγκαστικα, παραγει τον V), ή το “μικροτερο” δυνατο υποσυνολο που παραγει τον V (το οποιο ειναι αναγκαστικα ΓΑ).

Τελειωνουμε αυτη τη παραγραφο με μια βασικη προταση η οποια ειναι απορροια των βασικων ιδιοτητων μιας βασης, και της οποιας την αποδειξη αφηνουμε σε σας.

Προταση 1.1.1 *Εστω* $\mathbf{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ *μια βαση του* $V \subset \mathbf{R}^n$ *και εστω* $u \in V$. *Τοτε υπαρχουν μοναδικα* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, *ετσι ωστε:*

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Η Εννοια της Γραμμικης Απεικονισης

Ορισμος 1.1.8 *Εστω* $V \subset \mathbf{R}^n$, $W \subset \mathbf{R}^m$ *υποχωροι. Μια συναρτηση* $f : V \to W$ *θα καλειται μια* **γραμμικη απεικονιση ή γραμμικος μετασχηματισμος** *αν για καθε* $u, v \in V$, *και* $\lambda \in \mathbf{R}$*:*

1. *f(u+v)=f(u)+f(v), και*
2. *f(λu)=λf(u)*

δηλαδη, αν η f *διατηρει τις πραξεις* $+$ *και* $\cdot$ *του* V.

Παραδειγμα 14

1. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1,\ f(x, y, z) = 2x - y + z$
2. $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2,\ T(x, y, z, w) = (2x + 3y - z, w + y + 3x)$
3. $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\ g(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z)$
4. $h : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^6,\ h(x, y, z, w, v) = (x^2, y + z, z - w, v + x, 2v, 3y)$

Στο παραπανω παραδειγμα, οι 1, 2, και 3 *ειναι* γραμμικες απεικονισεις, αλλα η 4 *δεν ειναι* (γιατι?).

Δυο εννοιες στενα συνδεδεμενες με την εννοια της γραμμικης απεικονισης ειναι ο *πυρηνας* και η *εικονα* της απεικονισης. Πιο συγκεκριμενα, οριζουμε:

Ορισμος 1.1.9 *Εστω* $f : V \to W$ *γραμμικη απεικονιση. Τοτε οριζουμε:*

1. *Τον πυρηνα* $(\mathrm{Ker}\ f)$,*σαν* $\mathrm{Ker}\ f = \{u \in V \mid f(u) = \vec{0}\}$, *και*
2. *Την εικονα* $(\mathrm{Im}\ f)$, *σαν* $\mathrm{Im}\ f = \{f(u), \forall u \in V\}$

Τα συνολα τα οποια οριστηκαν παραπανω εχουν μια αμεση σχεση με την εννοια του υποχωρου: ειναι τα ιδια υποχωροι! Εχουμε λοιπον,

Θεωρημα 1.1.3 *Εστω* $f : V \to W$ *μια γραμμικη συναρτηση. Τοτε*

1. *Ο* $(\mathrm{Ker} f)$ *ειναι υποχωρος του* V
2. *Η* $(\mathrm{Im} f)$ *ειναι υποχωρος του* W, *και επιπλεον*
3. $\dim\mathrm{Ker}\ f + \dim\mathrm{Im} f = \dim V$.

Αποδειξη: 1. Εστω $u, v \in \mathrm{Ker}\, f$. Τοτε, $f(u+v) = f(u)+f(v) = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$, και αν $\lambda \in \mathbf{R}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$, και συνεπως ο $\mathrm{Ker}\, f$ ειναι υποχωρος του V.

2. Η αποδειξη αυτη ειναι παρομοια με αυτη του 1.

3. Για να αποδειξουμε αυτη τη σχεση ας θεωρησουμε μια βαση του πυρηνα της f, $\mathbf{A} = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, δηλαδη $\dim \mathrm{Ker} f = k$. Στη συνεχεια, επεκτεινουμε αυτη τη βαση σε μια βαση ολοκληρου του χωρου V, δηλαδη, προσθετουμε διανυσματα $w_1, w_2, \cdots, w_r$ στην βαση $\mathbf{A}$, και παιρνουμε την βαση $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \{w_1, \cdots, w_r\}$ του χωρου V. Εστω τωρα $K = \{f(w_1), \cdots, f(w_r)\}$. Θα δειξουμε οτι το K ειναι μια βαση της εικονας της f. Κατ' αρχη, το K ειναι ΓΑ, διοτι αν

$$\lambda_1 f(w_1) + \cdots + \lambda_r f(w_r) = \vec{0}$$

τοτε

$$f(\lambda_1 w_1) + \cdots + f(\lambda_r w_r) = f(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r) = \vec{0}$$

απο την οποια επεται οτι το διανυσμα $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r$ θα ανηκει στον πυρηνα. Το τελευταιο, ομως, συνεπαγει οτι αυτο το διανυσμα θα πρεπει να ειναι το μηδενικο (γιατι?), και ετσι λογω του οτι τα $w_1, \cdots, w_r$ ειναι ΓΑ, θα πρεπει ολοι οι λ συντελεστες να ειναι μηδεν, δηλαδη το K ειναι ΓΑ. Απο την αλλη μερια, το K παραγει την εικονα της f. Για να δουμε αυτο, θεωρουμε ενα "τυχαιο" στοιχειο $f(u)$ της $\mathrm{Im} f$. Τοτε μπορουμε να γραψουμε

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + b_1 w_1 + \cdots + b_r w_r$$

απο το γεγονος οτι το $\mathbf{B}$ ειναι μια βαση του V. Εφαρμοζοντας την f στην παραπανω ισοτητα, και εχοντας υποψη οτι το συνολο $\mathbf{A}$ ειναι μια βαση του πυρηνα της f, παιρνουμε

$$f(u) = b_1 f(w_1) + \cdots + b_r f(w_r)$$

το οποιο μας λεει οτι το K πραγματι παραγει την εικονα της f. ■

Μια αλλη ενδειξη της "ειδικης" φυσης μιας γραμμικης απεικονισης ειναι και η ακολουθη παρατηρηση:

Παρατηρηση 1.1.3 *Εστω $f : V \to W$ γραμμικη απεικονιση. Τοτε "ξερουμε" ολες τις τιμες της f <u>εανν</u> ξερουμε τις τιμες της σε καποια βαση του V.*

Αποδειξη: Εστω $\mathbf{B} = \{v_1, \cdots, v_k\}$ μια βαση του V και εστω $u \in V$. Τοτε υπαρχουν μοναδικα (Προταση 1.1.1) $a_1, \cdots, a_k \in \mathbf{R}$, ετσι ωστε

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$$

και συνεπως $f(u) = \sum_{j=1}^{k} a_j f(v_j)$. ■

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

1 (*a*) Εστω $V = \{(x,y,z,w)\,|\,2x - y + 5z = 0 \,\&\, 2y - 3z + 4w = 0\}$. Να δειχτει οτι ο V ειναι υποχωρος του $\mathbf{R}^4$.

(*b*) Εστω $W = \{(x,y,z)\,|\,z \geq 0\}$. Ειναι ο W υποχωρος του $\mathbf{R}^3$ (και γιατι)?

2 Εστω $B = \{(1,0,1),(1,2,-3),(3,2,-1)\}$.

(*a*) Εστω $u = (1,-4,9)$, και $v = (0,3,-5)$. Εξετασατε αν τα u, v ειναι γραμμικος συνδυασμος των στοιχειων του B.

(*b*) Βρειτε την ικανη και αναγκαια συνθηκη ετσι ωστε το διανυσμα (x,y,z) να ανηκει στον υποχωρο $S(B)$.

3 (*a*) Να βρεθει μια βαση και η διασταση του υποχωρου V της Ασκησης 1.

(*b*) Να βρεθει μια βαση και η διασταση του υποχωρου $S(B)$ της Ασκησης 2.

4 Στο χωρο $\mathbf{R}^n$ δινονται k γραμμικα ανεξαρτητα διανυσματα, με $k < n$. Να δειχτει οτι υπαρχει βαση (του $\mathbf{R}^n$) η οποια περιεχει τα δοθεντα ΓΑ διανυσματα.

5 Εστω η γραμμικη απεικονιση $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, με $T(x,y,z) = (x - y + z, x + 2y - z)$. Βρειτε μια βαση του πυρηνα $\mathrm{Ker}T$, και μια βαση της εικονας $\mathrm{Im}f$ της T.

6 Να βρεθει η διασταση του πυρηνα και της εικονας για τις απεικονισεις 1, 2, και 3 του Παραδειγματος 14.

7 Να βρεθει μια γραμμικη απεικονιση $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ η οποια πληρει τις εξης συνθηκες:

I. $f(1,0,1) = (2,1)$

II. $f(0,1,2) = (1,3)$

III. $f(0,3,5) = (0,1)$

Υποδειξη: Παρατηρηση 1.1.3

1.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Μια αλλη εννοια στενα συνδεδεμενη με αυτη της γραμμικης απεικονισης, ειναι η εννοια του πινακα. Στη παραγραφο αυτη θα δουμε μερικες βασικες ιδιοτητες των πινακων, ως επισης και τη "συνδεση" αυτων με τις γραμμικες απεικονισεις. Ξεκιναμε με τον ορισμο ενος πινακα:

Ορισμος 1.2.1 *Ενας (πραγματικος) πινακας $m \times n$, A ειναι μια ορθογωνια διαταξη αριθμων αποτελουμενων απο m γραμμες και n στηλες,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο πινακας Α συμβολιζεται επισης σαν $A = [a_{ij}]$, *με* $1 \leq i \leq m$, *και* $1 \leq j \leq n$.

Παραδειγμα 15 *Ο* $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, *ειναι ενας* 2×3 *πινακας.*

Εστω A ενας $m \times n$ πινακας. Αυτος θα καλειται *τετραγωνικος,* εανν $m = n$, δηλαδη, ο αριθμος των γραμμων του ειναι ισος με τον αριθμο των στηλων του. Η κυρια *διαγωνιος* ενος *τετραγωνικου* $n \times n$ πινακα $A = [a_{ij}]$ ειναι η "νοητη" γραμμη η οποια εκτεινεται απο "βορειοδυτικα" προς "νοτιοανατολικα", και η οποια περιεχει τα στοιχεια $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.

Οι πινακες I_n $n \times n$, και $0, (m \times n)$,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

καλουνται *ταυτοτικος,* και *μηδενικος,* αντιστοιχα. Παρατηρηστε οτι, ενας ταυτοτικος πινακας ειναι <u>παντα</u> τετραγωνικος, ενω ενας μηδενικος δεν ειναι αναγκαιο να ειναι τετραγωνικος.

Το συνολο των $m \times n$ πινακων θα συμβολιζεται με M_{mn}, ενω το συνολο των $n \times n$ πινακων θα συμβολιζεται απλα με M_n. Στο συνολο M_{mn} μπορουμε να ορισουμε τις συνηθεις πραξεις της προσθεσης και του αριθμητικου πολλαπλασιασμου σαν ακολουθα:

Εστω πινακες $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{mn}$, και $\lambda \in \mathbf{R}$. Τοτε, οριζουμε

$$A + B = C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \qquad \text{και} \qquad \lambda A = D = [d_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$$

Μπορουμε επισης να "πολλαπλασιασουμε" πινακες κατω απο ορισμενες συνθηκες. Θα αρχισουμε με τον πιο βασικο πολλαπλασιασμο, τον οποιον θα επεκτεινουμε λιγο παρακατω. Εστω λοιπον πινακες $A = [a_{ij}], m \times n$, και $X = [x_j], n \times 1$. Τοτε οριζουμε εναν νεο πινακα $C = AX$ σαν ακολουθα:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Στην παραπανω σχεση παρατηρουμε οτι

1. για να ειναι εφικτος ο πολλαπλασιασμος των A και X, ο αριθμος των στηλων του A θα πρεπει να ειναι ισος με τον αριθμο των γραμμων του X

2. ο πινακας γινομενο ειναι $m \times 1$, και
3. τα στοιχεια του AX ειναι τα αθροισματα των γινομενων των στοιχειων των γραμμων του A με τα στοιχεια της στηλης του X.

Μπορουμε να γενικευσουμε τον παραπανω πολλαπλασιασμο μεταξυ "γενικων" πινακων, με την προυποθεση, βεβαια, οτι θα ικανοποιειται η συνθηκη (1). Ετσι εχουμε

$$
\begin{aligned}
AB &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}}_{n\times k} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jk} \end{bmatrix}}_{m\times k}
\end{aligned}
$$

Εδω αναφερουμε συνοπτικα μερικα απλα, αλλα χρησιμα, σημεια πολλαπλασιασμου πινακων.

1. Εαν b_j ειναι η j στηλη (column) του πινακα B, τοτε η j στηλη του γινομενου AB ειναι ιση με Ab_j,
2. Εαν a_i ειναι η i γραμμη (row) του A, τοτε η i γραμμη του AB ειναι ιση με a_iB.

Ετσι λοιπον στο γινομενο AB, πολλαπλασιασμος απο αριστερα με A πολλαπλασιαζει τις στηλες του B, ενω πολλαπλασιασμος απο δεξια με B πολλαπλασιαζει τις γραμμες του A.

1. Εαν $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ και $x \in \mathbf{R}^n$, τοτε το Ax ειναι ενας γραμμικος συνδυασμος των στηλων του A (οι συντεταγμενες (coordinates) του x ειναι οι συντελεστες).
2. Εαν $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ και $y \in \mathbf{R}^m$, τοτε το y^tA ειναι ενας γραμμικος συνδυασμος των γραμμων του A (οι συντεταγμενες του y ειναι οι συντελεστες).

Απο δω και στο εξης, για λογους χωρου, θα θεωρουμε ενα n διανυσμα "γραμμη" και ενα n διανυσμα "στηλη" σαν στοιχεια του χωρου $\mathbf{R}^n$.

Εστω τωρα γραμμικη συναρτηση $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ και υποτεθειστω οτι $\mathbf{B}_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ και $\mathbf{B}_m = \{e_1, \cdots, e_m\}$ ειναι οι κανονικες βασεις των $\mathbf{R}^n$ και $\mathbf{R}^m$, αντιστοιχα. Επισης εστω

$$T(e_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A_T = [a_{ij}] = [T(e_1) \;\; T(e_2) \;\; \cdots \;\; T(e_n)] \tag{1.9}$$

Τοτε εχουμε την ακολουθη θεμελιωδη παρατηρηση:

Παρατηρηση 1.2.1 *$T(x) = A_T x$, οπου $x \in \mathbf{R}^n$.*

Αποδειξη: Εστω $x \in \mathbf{R}^n$ ενα διανυσμα στηλη. Τοτε

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} = Ax$$

■

Ο πινακας A_T (ο οποιος ειναι $m \times n$) καλειται ο *κανονικος* ή *φυσιολογικος* πινακας της T. Αντιστροφα, χρησιμοποιωντας την (1.2), εαν μας δινεται ενας $m \times n$ πινακας A μπορουμε να κατασκευασουμε μια γραμμικη απεικονιση $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ και η οποια, βεβαια, εχει την ιδιοτητα οτι ο κανονικος της πινακας ειναι ισος με τον A, δηλαδη, $A = A_T$. Το τελευταιο μας δινει την ευχερεια να ορισουμε μια ενα–προς–ενα και επι συναρτηση απο το συνολο $F_{nm} = \{f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \mid f \text{ γραμμικη}\}$ στο συνολο M_{mn} των $m \times n$ πινακων σαν ακολουθα:

$$\mathcal{F} : F_{nm} \to M_{mn}, \text{ με } \mathcal{F}(T) = A_T$$

Απο την παραπανω συζητηση, φαινεται ευκολα οτι η $\mathcal{F}$ ειναι ενας "ισομορφισμος" και σαν απορροια αυτου παιρνουμε οτι "υπαρχουν τοσοι $m \times n$ πινακες οσες και οι γραμμικες συναρτησεις απο τον $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^m$."

Παραδειγμα 16 *Εστω $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z)$. Τοτε $g(1, 0, 0) = (1, 1)$, $g(0, 1, 0) = (-1, 2)$ και $g(0, 0, 1) = (1, -1)$, και ετσι ο $A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.*

Επαληθευουμε οτι

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + z \\ x + 2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Εχοντας υποψη τα παραπανω, ειμαστε τωρα σε θεση να "ριξουμε φως" στη σχεση μεταξυ του πυρηνα $\mathrm{Ker}f$, και της εικονας $\mathrm{Im}f$ μιας γραμμικης απεικονισης $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, συναρτησει του κανονικου της πινακα A_f. Αν $S_1, S_2, \cdots, S_n$ ειναι οι στηλες διανυσματα του A_f τοτε αυτα θα παραγουν (προφανως) την $\mathrm{Im}f$. Δηλαδη, για να βρουμε μια βαση της εικονας, θα διαλεξουμε τον μεγιστο αριθμο των γραμμικα ανεξαρτητων διανυσματων απο τα $S_1, \cdots, S_n$. Αυτος ο αριθμος θα ειναι, βεβαια, η διασταση της $\mathrm{Im}f$. Απο την αλλη μερια, πως θα βρισκουμε μια βαση για τον πυρηνα $\mathrm{Ker}f$ της f? Μα αυτο ειναι τωρα μια ευκολη υποθεση απο το γεγονος οτι "το $x \in \mathrm{Ker}f$" εανν $f(x) = \vec{0}$ και το οποιο ειναι ισοδυναμο με το $Ax = \vec{0}$. Το τελευταιο δεν ειναι παρα ενα "ομογενες" γραμμικο συστημα, ομοιο με αυτα που εχουμε ηδη δει στην προηγουμενη παραγραφο, και που θα δουμε στην επομενη παραγραφο επισης, οταν θα συζητησουμε επιπλεον για τα γραμμικα συστηματα με λεπτομερεια.

Στη συνεχεια, θα σχετισουμε την συνθεση γραμμικων απεικονισεων με τον πολλαπλασιασμο πινακων. Για το σκοπο αυτο, ας θεωρησουμε $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, και $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ δυο γραμμικες συναρτησεις. Τοτε μπορουμε να ορισουμε την "συνηθη" συνθετη συναρτηση

$$h = g \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k, \qquad \text{με} \qquad h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

η οποια ειναι επισης γραμμικη (γιατι)? Εστω τωρα $A_f = [a_{ij}], A_g = [b_{jr}]$, και $A_h = [c_{rj}]$ οι κανονικοι πινακες των f, g και h , των οποιων οι διαστασεις ειναι $m \times n$, $k \times m$, και $k \times n$, αντιστοιχα. Εστω ενα σταθερο j, $1 \leq j \leq n$. Τοτε

$$[c_{rj}] = h(e_j) = g(f(e_j)) = A_g \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_{1i} a_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \end{bmatrix}$$

δηλαδη, $c_{rj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ri} a_{ij}$, ή

$$\begin{array}{ccccc} A_h & = & A_g & \cdot & A_f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k \times n & & k \times m & & m \times n \end{array} \tag{1.10}$$

Ετσι λοιπον, η συνθεση γραμμικων απεικονισεων αντιστοιχει στον πολλαπλασιασμο των αντιστοιχων κανονικων τους πινακων, *αλλα* με την αντιστροφη διαταξη.

1.3 ΤΑΞΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ–ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμος 1.3.1 *Εστω A ενας $m \times n$ πινακας. Η* **ταξη** $\mathrm{rank}A = r(A)$ *του A οριζεται σαν ο μεγιστος αριθμος των ΓΑ στηλων του.*

Εστω τωρα $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ η αντιστοιχη γραμμικη συναρτηση του A. Τοτε συμφωνα με τον παραπανω ορισμο, η ταξη του A δεν ειναι τιποτα αλλο απο την διασταση της εικονας $\mathrm{Im}T$, της T. Αν τωρα $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ειναι μια γραμμικη συναρτηση, η **ταξη** της f οριζεται σαν η ταξη του κανονικου της πινακα A_f.

Μια αλλη εννοια η οποια εχει σχεση με την ταξη ειναι η λεγομενη "μηδενικοτητα" ή nullity ενος πινακα A και η οποια οριζεται σαν $\mathrm{null}A = \dim \mathrm{Ker}T$, οπου βεβαια, η T ειναι ορισμενη σαν παραπανω. Για εναν $m \times n$ πινακα A, παιρνουμε κατευθειαν απο το θεωρημα 1.1.3 οτι,

$$\mathrm{rank(A)} + \mathrm{null(A)} = n \tag{1.11}$$

Παραδειγμα 17 *Εστω* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. *Αν λοιπον* $\mathbf{B} = \{(1,3),(2,5)\}$, *παρατηρουμε οτι* $rankA = dimS(B) = 2$, *και* $nullA = 0$.

Ξερουμε οτι η ταξη ενος πινακα ειναι ο μεγιστος αριθμος των ΓΑ στηλων του. Αλλα, καποιος/α θα μπορουσε να ρωτησει, "τι συμβαινει με τον μεγιστο αριθμο των ΓΑ γραμμων του πινακα?", διοτι ο A δεν εχει μονον στηλες, εχει και γραμμες! Η απαντηση δινεται απο το επομενο θεωρημα. Ομως, πριν διατυπωσουμε αυτο το αποτελεσμα, θα χρειαστουμε τον ορισμο του *αναστροφου* ενος πινακα $A = [a_{ij}]$. Ο αναστροφος λοιπον του A ο οποιος συμβολιζεται με A^T, οριζεται σαν $A^T = [a_{ji}]$, δηλαδη, οι γραμμες του A^T ειναι οι στηλες του A.

Θεωρημα 1.3.1 *Για ενα πινακα A εχουμε* $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{rank}A^T$.

Ετσι λοιπον η ταξη του πινακα ειναι επισης και ο μεγιστος αριθμος των ΓΑ γραμμων του!

Η επομενη παρατηρηση ειναι προφανης:

Παρατηρηση 1.3.1 *Αν ο A ειναι $m \times n$, τοτε*

$$rank(A) \leq \min\{m, n\}$$

Στο Παραδειγμα 17, η ευρεση της ταξης ηταν μια παρα πολυ ευκολη υποθεση. Ομως, γενικα η διαδικασια για την ευρεση της ταξης δεν ειναι μια απλη υποθεση. Πως λοιπον θα βρισκουμε την ταξη ενος πινακα A? Η απαντηση σε αυτο το ερωτημα κειται στο ακολουθο:

Τρεις απλες και στοιχειωδεις πραξεις (elementary operations) μπορουν να χρησιμοποιηθουν ωστε να τεθει ενας πινακας σε μια απλη και μοναδικη μορφη η οποια μπορει να αποβει χρησιμη σε περιπτωσεις οπως για την ευρεση της ταξης, τη λυση ενος γραμμικου συστηματος, την ευρεση της οριζουσας, την ευρεση του αντιστροφου, κ.ο.κ. Αν επιστησουμε την προσοχη μας στις γραμμες, τοτε εχουμε:

Εναλλαγη δυο γραμμων

Η εναλλαγη των γραμμων i και j μπορει να επιτευχτει με πολλαπλασιασμο απο αριστερα με τον πινακα I_{ij} οπου ο τελευταιος προερχεται απο το μοναδιαιο μετα την εναλλαγη των γραμμων i & j, δηλαδη αν r_i, r_j ειναι οι i, j γραμμες του I, τοτε $r_i \longleftrightarrow r_j$.

Πολλαπλασιασμος μιας γραμμης απο μια σταθερα

Αυτο επιτυγχανεται με πολλαπλασιασμο απο αριστερα με τον πινακα I_c οπου ο τελευταιος προερχεται απο το μοναδιαιο μετα τον πολλαπλασιασμο της i γραμμης του με c.

Προσθεση γινομενου μιας γραμμης σε μια αλλη

Προσθεση της r_i επι c στην γραμμη r_j επιτυγχανεται με πολλαπλασιασμο απο αριστερα με τον πινακα που προερχεται απο το μοναδιαιο οταν κανουμε την ιδια διαδικασια σε αυτον, δηλαδη πολλαπλασιαζουμε την i γραμμη του με c και προσθετουμε το αποτελεσμα στην j γραμμη του.

Εστω τωρα ενας τετραγωνικος $n \times n$ πινακας $B = [a_{ij}]$, με ταξη $\text{rank}B = n$. Τοτε ο πινακας B καλειται *μη ιδιαζων*. Τι συμβαινει στη περιπτωση αυτη? Οσον αφορα την ταξη του B, αυτη δεικνυει οτι *ολες* οι στηλες του, καθως επισης και οι γραμμες του, ειναι ΓΑ. Αρα, η μηδενικοτητα του πινακα ειναι μηδεν, ητοι $\text{null}A = 0$. Για να δουμε ακομη μια πρωταρχικη ιδιοτητα ενος μη ιδιαζοντος πινακα, ας ανατρεξουμε στην αντιστοιχη του γραμμικη απεικονιση. Εστω λοιπον $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ η αντιστοιχη γραμμικη συναρτηση του B. Τοτε η διασταση του πυρηνα της f θα πρεπει να ειναι μηδεν (γιατι?), και συνεπως η f ειναι ενα–ενα και επι. Για να δουμε το τελευταιο, εστω οτι $f(u) = f(v)$. Τοτε $f(u-v) = \vec{0} \Longrightarrow u - v \in \text{Ker}f$, και ετσι $u - v = \vec{0} \Longrightarrow u = v$, δηλαδη, η f ειναι 1–1. Απο την αλλη μερια. λογω του οτι η ταξη του B ειναι n, η f ειναι επισης επι (γιατι?). Αρα λοιπον, μπορουμε να ορισουμε την αντιστροφη συναρτηση f^{-1} της f σαν

$$f^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \text{ με } f^{-1}(u) = v \quad \text{οταν} \quad f(v) = u$$

Ειναι ευκολο να δουμε οτι η f^{-1} ειναι γραμμικη, καθως επισης ενα–ενα και επι. Εστω τοτε A ο κανονικος πινακας της αντιστροφης αυτης συναρτησης.

Λογω του οτι η συνθεση αυτων των δυο συναρτησεων ειναι η ταυτοτικη συναρτηση $I : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, με $I(x) = x$, για καθε $x \in \mathbf{R}^n$, και ετσι ο κανονικος πινακας της I ειναι ο ταυτοτικος πινακας I_n (δειξτε αυτο!), εχουμε

$$AB = BA = I_n = I \tag{1.12}$$

Ενας τετοιος πινακας B λοιπον καλειται επισης *αντιστρεψιμος* και ο A καλειται ο *αντιστροφος* του B, και συμβολιζεται με $A = B^{-1}$.

1.4 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Συχνα στα μαθηματικα ειναι χρησιμο να χαρακτηριζει κανεις ενα πολυδιαστατο φαινομενο με εναν αριθμο, και η οριζουσα (determinant) ειναι ενα τετοιο παραδειγμα. Οριζεται μονο για τετραγωνικους πινακες $A \in M_n$, και μπορει να παρουσιαστει με δυο διαφορετικους, αλλα ισοδυναμους, τροπους. Συμβολιζουμε την οριζουσα του A με $\det A$ ή με $|A|$.

Αναπτυξη Laplace

Η οριζουσα μπορει να οριστει επαγωγικα για ενα $A = [a_{ij}] \in M_n$ σαν ακολουθα. Υποτεθειστω οτι η οριζουσα εχει ηδη οριστει στο συνολο M_{n-1} και εστω $A_{ij} \in M_{n-1}$ ο υποπινακας του $A \in M_n$ που προερχεται απο τη διαγραφη της i γραμμης και j στηλης του A. Τοτε

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

για ολα τα $i \leq n, j \leq n$, και αυτη η κοινη τιμη ειναι η $\det A$. Το αριστερο μερος της ανω ισοτητας ειναι η αναπτυξη κατα την γραμμη i, ενω το δεξιο ειναι η αναπτυξη κατα την στηλη j. Για καθε εκλογη γραμμης ή στηλης, αυτη η αναπτυξη μας δινει την οριζουσα. Αυτος ο επαγωγικος ορισμος αρχιζει οριζοντας την οριζουσα ενος 1×1 πινακα να ειναι η τιμη του στοιχειου του, δηλαδη αν $A = [a_{11}]$, τοτε $\det A = a_{11}$. Ειναι φανερο απο τον ορισμο οτι $\det A^t = \det A$.

Αναπτυξη με Εναλλασσομενο Αθροισμα

Μια αλλη μεθοδος ορισμου της οριζουσας ειναι η εξης: Εστω $A = [a_{ij}] \in M_n$. Τοτε εχουμε

$$\det A = \sum_{\sigma} sgn \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

οπου το αθροισμα εκτεινεται για ολες τις μεταθεσεις σ των n στοιχειων $\{1, 2, \cdots, n\}$, και το προσημο (sgn) μιας μεταθεσης ειναι $+1$ η -1 αν η μεταθεση ειναι αρτια ή περιττη, αντιστοιχα.

Πολλαπλασιαστικοτητα

Μια απο τις βασικες ιδιοτητες της οριζουσας ειναι και η ακολουθη: Αν εχουμε πινακες $A, B \in M_n$ τοτε

$$\det AB = \det A \det B \tag{1.13}$$

Αυτο μπορει να αποδειχτει χρησιμοποιωντας στοιχειωδεις πραξεις και στους δυο πινακες.

Συναρτησιακος Χαρακτηρισμος της Οριζουσας

Αν θεωρησουμε την οριζουσα σαν μια συναρτηση καθε μιας χωριστα στηλης (γραμμης) οταν οι αλλες στηλες (γραμμες) ειναι σταθερες, τοτε η οριζουσα ειναι μια γραμμικη συναρτηση της δοθεισης στηλης (γραμμης). Μια τετοια συναρτηση καλειται *πλειογραμμικη (multilinear)* . Επιπλεον το ακολουθο θεωρημα χαρακτηριζει πληρως την οριζουσα, και μαλιστα σε μερικα βιβλια δινεται σαν ο ορισμος της.

Θεωρημα 1.4.1 *Η οριζουσα ειναι η μοναδικη συναρτηση $f : M_n \to \mathbf{R}$ που πληρει τα ακολουθα.*

1. *Η f ειναι πλειογραμμικη,*
2. *Η f ειναι εναλλασσουσα, δηλαδη αν γινει εναλλαγη δυο στηλων (γραμμων) η οριζουσα πολλαπλασιαζεται με -1, και*
3. *$f(I) = 1$, οπου I ειναι ο ταυτοτικος πινακας.*

1.5 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ενα *γραμμικο συστημα* m εξισωσεων με n αγνωστους ειναι ενα συστημα της μορφης

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1.14}$$

Το ανωτερω συστημα μπορει να ξαναγραφει με τον συμβολισμο πινακων σε ενα συμπαγη τροπο σαν ακολουθα:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff Ax = b$$

Στο παραπανω συστημα ο πινακας A καλειται ο πινακας των *συντελεστων*, το διανυσμα $x = [x_1 \ \ x_2 \ \ \cdots \ \ x_n]^T$ ειναι το διανυσμα των αγνωστων, και το διανυσμα $b = [b_1 \ \ b_2 \ \ \cdots \ \ b_n]^T$ ειναι το διανυσμα των σταθερων. Θα καλουμε μια *λυση* αυτου του συστηματος ενα διανυσμα $c \in \mathbf{R}^n$ ετσι ωστε αυτο να ικανοποιει το συστημα, δηλαδη,

$$Ac = b \tag{1.15}$$

Στη περιπτωση στην οποια το συστημα εχει λυση καλειται *συμβιβαστο.* Εξαλλου, η λεγομενη "γενικη λυση" του συστηματος (1.14) θα ειναι το συνολο ολων των διανυσματων $c \in \mathbf{R}^n$ με την ιδιοτητα οτι το c ειναι μια λυση του (1.14).

Ενα γραμμικο συστημα μπορει να εχει καμια, μια (και μοναδικη) ή απειρες λυσεις. Στην παραγραφο αυτη θα προσπαθησουμε να δωσουμε τις απαραιτητες τεχνικες για της ευρεση της γενικης λυσης ενος γραμμικου συστηματος. Ολη σχεδον η διαδικασια εξαρταται απο τα λεγομενα "ομογενη" συστηματα, τα οποια ειναι συστηματα της μορφης

$$Ax = \vec{0} \tag{1.16}$$

Ετσι λοιπον, θα αρχισουμε με αυτα τα συστηματα. Πρωτα παρατηρουμε οτι, ενα ομογενες συστημα εχει παντα λυση, την μηδενικη, η οποια καλειται και "τετριμμενη." Υπο ποιες συνθηκες ενα τετοιο συστημα εχει και αλλες λυσεις (εκτος της τετριμμενης)? Για να απαντησουμε σε αυτο το ερωτημα, θα θεωρησουμε τον πινακα των συντελεστων A σαν μια γραμμικη απεικονιση $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Με αυτη τη θεωρηση, μια λυση του συστηματος δεν ειναι τιποτα αλλο παρα ενα διανυσμα του πυρηνα $\mathrm{Ker}A$, της A. Ενθυμουμενοι οτι $\mathrm{null}A + \mathrm{rank}A = n$, δεν μενει παρα να βρουμε την ταξη του πινακα A, κατι το οποιο εχουμε ηδη δει στην Παρ. 1.3. Ετσι λοιπον εχουμε την επομενη προταση:

Προταση 1.5.1 *Εστω το ομογενες συστημα $Ax = \vec{0}$, με A να ειναι $m \times n$. Τοτε,*

1. *Το συστημα εχει μια μοναδικη λυση (την τετριμμενη) εανν $rankA = n$*
2. *Το συστημα εχει απειρες λυσεις εανν $rankA < n$.*

Ομως, εμεις θελουμε τη γενικη λυση του συστηματος $Ax = \vec{0}$, στη περιπτωση που το συστημα εχει απειρες λυσεις. Για να εχουμε λοιπον τη γενικη λυση, δεν μενει παρα να παρατηρησουμε οτι το συνολο των λυσεων του, η γενικη λυση δηλαδη, ειναι ενας *υποχωρος* του $\mathbf{R}^n$, (ο πυρηνας της A) και σαν τετοιος μπορει να περιγραφει με την ευρεση μιας βασης του. Με μια διαδικασια ακριβως ομοια με αυτη του Παραδειγματος 13, βρισκουμε τον αριθμο των "ελευθερων" μεταβλητων, ο οποιος ειναι ισος με $\dim \mathrm{Ker}A$ (γιατι?) και στη συνεχεια βρισκουμε μια βαση του υποχωρου των λυσεων.

Εχοντας αυτες τις πληροφοριες υπο μαλης, η γενικη λυση ενος μη ομογενους συστηματος ειναι μια παρα πολυ απλη υποθεση τωρα. Το μονο που χρειαζομαστε ειναι το ακολουθο θεωρημα:

Θεωρημα 1.5.1 *Εστω το συστημα $Ax = b$, και εστω B ο πινακας $B = [A : b]$, με B $m \times (n+1)$. Ο B καλειται ο* **επηυξημενος** *πινακας του συστηματος. Τοτε*

1. *Το συστημα $Ax = b$ εχει λυση εανν $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$*
2. *Στη περιπτωση που το συστημα εχει λυση, τοτε η γενικη λυση του ειναι της μορφης $c = \Gamma\Lambda_O + s$, οπου $\Gamma\Lambda_O$ ειναι η γενικη λυση του αντιστοιχου ομογενους $Ax = \vec{0}$, και s ειναι μια λυση του ιδιου του συστηματος $Ax = b$.*

Αποδειξη: 1. Τι σημαινει οτι το συστημα εχει λυση? Στη γλωσσα των απεικονισεων αυτο μεταφραζεται οτι το διανυσμα b ανηκει στην εικονα $\mathrm{Im}A$, της A (εδω "ταυτιζουμε" τον πινακα A με την αντιστοιχη απεικονιση που οριζει, την οποιαν καλουμε ξανα A). Ομως, η εικονα της A παραγεται απο τα στηλο–διανυσματα του πινακα A. Αρα λοιπον, το συστημα εχει λυση εανν το διανυσμα b ανηκει στον υποχωρο που παραγουν οι στηλες του A. Με αλλα λογια, αν $C = \{S_{1,2}, \cdots, S_n\}$ ειναι το συνολο των στηλων του A, το συστημα θα εχει λυση εανν $\mathrm{dim}C = \dim S \cup b$. Μα το τελευταιο ειναι ισοδυναμο με την rank $A = \mathrm{rank}\ B$.

2. Εστω τωρα d μια λυση του ομογενους $Ax = \vec{0}$, και s μια λυση του συστηματος. Τοτε $A(d+s) = Ad+As = \vec{0}+b = b$, δηλαδη, η $d+s$ ειναι λυση του συστηματος. Ειναι, ομως, ολες οι λυσεις αυτης της μορφης? Η απαντηση ειναι ναι. Για να δουμε αυτο, εστω y μια "τυχαια" λυση του συστηματος. Θεωρουμε το διανυσμα $\delta = (y-s)+s$. Εχουμε, $A(y-s) = Ay - As = b - b = \vec{0}$, δηλαδη, το $y - s$ ειναι λυση του ομογενους. Οθεν, **καθε** λυση του συστηματος ειναι της παραπανω λεχθεισης μορφης, και η αποδειξη του θεωρηματος ειναι πληρης. ■

Τελειωνουμε αυτη τη παραγραφο με δυο χαρακτηρισμους, της ταξης ενος πινακα και της αντιστρεψιμοτας ενος τετραγωνικου πινακα συναρτησει των εννοιων που εχουμε δει μεχρι τωρα.

Χαρακτηρισμοι της Ταξης

Τα παρακατω ειναι ολα ισοδυναμα για ενα δοθεντα πινακα $A \in M_{m,n}$.

1. $rank\ A = k$,
2. Υπαρχουν k, και μονον k, γραμμες (στηλες) του A οι οποιες ειναι γραμμικα ανεξαρτητες,
3. Υπαρχει ενας $k \times k$ υποπινακας του A του οποιου η οριζουσα ειναι μη μηδενικη, αλλα ολοι οι $(k+1)\times(k+1)$ υποπινακες του A εχουν οριζουσα 0,
4. $\dim Im(A) = k$,

5. Υπαρχει ενα συνολο απο k, αλλα οχι περισσοτερα απο k, γραμμικα ανεξαρτητα διανυσματα b ετσι ωστε το συστημα $Ax = b$ ειναι συμβιβαστο, και
6. $k = n - \dim Ker(A)$.

Αντιστρεψιμοτητα

Τα παρακατω μας δινουν ισοδυναμους χαρακτηρισμους για ενα πινακα $A \in M_n$, που ειναι αντιστρεψιμος.

1. Ο A ειναι αντιστρεψιμος,
2. Ο A^{-1} υπαρχει,
3. $rankA = n$
4. Οι στηλες (και οι γραμμες) του A ειναι γραμμικα ανεξαρτητες,
5. $\det A \neq 0$,
6. $\dim Im(A) = n$,
7. $\dim Ker(A) = 0$,
8. Το $Ax = b$ ειναι συμβιβαστο για καθε $b \in \mathbf{R}^n$,
9. Εαν το $Ax = b$ ειναι συμβιβαστο, τοτε εχει μοναδικη λυση,
10. Το συστημα $Ax = b$ εχει μοναδικη λυση για καθε $b \in R^n$,
11. Η μονη λυση του $Ax = 0$ ειναι η $x = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

1. Εξεταστε αν τα ακολουθα διανυσματα αποτελουν βαση του $\mathbf{R}^3$:

(i) $(1,1,1), (1,-1,5)$ (iii) $(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)$
(ii) $(1,2,3), (1,0,-1), (3,-1,0), (2,1,-2)$ (iv) $(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$

2. Εστω W ο υποχωρος του $\mathbf{R}^4$ που παραγεται απο τα διανυσματα $(1,-2,5,-3), (2,3,1,-4), (3,8,-3,-5)$. Βρειτε μια βαση και την διασταση του W. Επεκτεινετε την βαση του W σε μια βαση ολου του $\mathbf{R}^4$.

3. Βρειτε μια γραμμικη απεικονιση $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ του οποιου η εικονα ImT παραγεται απο τα διανυσματα $(1,2,0,-4), (2,0,-1,-3)$.

4. Βρειτε μια βαση και την διασταση του χωρου των λυσεων των ομογενων συστηματων:

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 2z + w &= 0 \\ 2x + \ \ y - \ \ z + w &= 0 \\ x - 2y + \ \ z + w &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - \ \ z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 2x \qquad + 2z &= 0 \\ 2x + y - \ \ z &= 0 \end{aligned}$$

5. Για ποια τιμη του k το συστημα $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = \ \ 5 \\ \ \ x_1 - 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = \ \ k \end{cases}$ ειναι συμβιβαστο?

Βρειτε για αυτη την τιμη του k τη γενικη λυση του συστηματος.
Βρειτε επισης τη γενικη λυση του εξης συστηματος:

$$\begin{aligned} y + \ \ z + \ \ u + \ \ 2v &= 2 \\ -x + 4y + 3z + 3u + \ \ 4v &= 7 \\ 2x + \ \ y + 3z + 2u + \ \ 8v &= 3 \\ 3x + \ \ y + 4z - \ \ u + \ \ 4v &= 0 \\ 5x + 2y + 7z \qquad + 10v &= 2 \end{aligned}$$

6. Να βρεθουν (αν υπαρχουν) οι αντιστροφοι των εξης πινακων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Μεχρι τωρα, στο διανυσματικο χωρο $\mathbf{R}^n$, προσθεταμε διανυσματα και τα πολλαπλασιαζαμε με εναν αριθμο. Καλλιστα θα μπορουσαμε να ρωτησουμε: Ειναι δυνατον να πολλαπλασιασουμε δυο διανυσματα ετσι ωστε το γινομενο τους να ειναι μια χρησιμη ποσοτητα? Ενα τετοιο γινομενο ειναι το εσωτερικο γινομενο του οποιου ο ορισμος δινεται παρακατω. Ενα αλλο ειναι το εξωτερικο γινομενο, το οποιο θα οριστει στην επομενη παραγραφο.

Το Εσωτερικο Γινομενο

Ορισμος 1.6.1 *Εστω διανυσματα $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbf{R}^n$. Τοτε το* **εσωτερικο γινομενο** *των a, b ειναι ο αριθμος $a \cdot b$ ο οποιος δινεται απο*

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{1.17}$$

Ετσι, για να βρουμε το εσωτερικο γινομενο των a, b πολλαπλασιαζουμε τις αντιστοιχες συνιστωσες τους και προσθετουμε. Το αποτελεσμα δεν ειναι διανυσμα, αλλα ενας (πραγματικος) αριθμος.

Παραδειγμα 18

$$(2,3)\cdot(-4,5) = 2(-4)+3(5) = 7$$
$$(-1,3,7)\cdot(2,\frac{1}{3},2) = (-1)2+3(\frac{1}{3})+7(2) = -2+1+14 = 13$$

Το εσωτερικο γινομενο πληρει πολλες απο τις ιδιοτητες του συνηθισμενου γινομενου πραγματικων αριθμων. Αυτες περιεχονται στο επομενο θεωρημα.

Θεωρημα 1.6.1 *Αν a, b, c ειναι διανυσματα του $\mathbf{R}^n$ και $\lambda \in \mathbf{R}$, τοτε*

1. $a\cdot a = |a|^2$
2. $a\cdot b = b\cdot a$
3. $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
4. $(\lambda a)\cdot b = \lambda(a\cdot b) = a\cdot(\lambda b)$
5. $0\cdot a = 0 \in \mathbf{R}$

Αποδειξη: Ασκηση.
Το εσωτερικο γινομενο $a\cdot b$ εχει μια γεωμετρικη ερμηνεια συναρτησει της **γωνιας θ μεταξυ των** a και b, η οποια οριζεται σαν η γωνια μεταξυ των γεωμετρικων παραστασεων των διανυσματων a, b τα οποια εχουν σαν αρχη την αρχη των αξονων O, οπου $0 \le \theta \le \pi$. Παρατηρηστε οτι αν τα a, b ειναι παραλληλα, τοτε $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$.

Ο τυπος στο επομενο θεωρημα χρησιμοποιειται απο τους φυσικους σαν ο *ορισμος* του εσωτερικου γινομενου.

Θεωρημα 1.6.2 *Αν θ ειναι η γωνια μεταξυ των διανυσματων a, b, τοτε*

$$a\cdot b = |a|\,|b|\,\cos\theta$$

Αποδειξη: Η αποδειξη αυτου του θεωρηματος βασιζεται στο νομο των συνημιτονων μεταξυ των γωνιων ενος τριγωνου, και αφηνεται σαν ασκηση.

Πορισμα 1.6.3 *Αν θ ειναι η γωνια μεταξυ των μη μηδενικων διανυσματων a, b, τοτε*

$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$$

Παραδειγμα 19 *Βρειτε τη γωνια μεταξυ των διανυσματων $a = (2,2,-1)$ και $b = (5,-3,2)$.*

Λυση: Επειδη

$$|a| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad \text{και} \qquad |b| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

και επειδη $\qquad a \cdot b = 2(5) + 2(-3) + (-1)2 = 2$
εχουμε, απο το Πορισμα 1.6.3,

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Ετσι, η γωνια μεταξυ των a, b ειναι η

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) = 1.46 \quad (\text{ή } 84^\circ)$$

Δυο διανυσματα a και b καλουνται **ορθογωνια** ή **καθετα** αν η μεταξυ τους γωνια ειναι $\theta = \pi/2$. Τοτε το Θεωρημα 1.6.2 μας δινει οτι

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos(\pi/2) = 0$$

Αντιστροφα, αν $a \cdot b = 0$, τοτε $\cos\theta = 0$, και ετσι $\theta = \pi/2$. Το μηδενικο διανυσμα 0 θεωρειται οτι ειναι καθετο σε καθε διανυσμα a. Ετσι,

$$\text{Τα } a \text{ και } b \text{ ειναι καθετα εαν και μονον εαν } a \cdot b = 0. \tag{1.18}$$

Παραδειγμα 20 *Τα διανυσματα $a = (2, 2, -1)$ και $b = (5, -4, 2)$ ειναι ορθογωνια.*

Το Εξωτερικο Γινομενο

Το **εξωτερικο γινομενο** $a \times b$ δυο διανυσματων a και b, σε αντιθεση με το εσωτερικο, ειναι διανυσμα. Γιαυτο το λογο καλειται επισης και **διανυσματικο γινομενο**. Ομως, το γινομενο $a \times b$ οριζεται μονο για διανυσματα στον χωρο $\mathbf{R}^3$. Εχουμε λοιπον

Ορισμος 1.6.2 *Εστω διανυσματα $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$. Τοτε, το εξωτερικο γινομενο των a, b οριζεται σαν*

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Ο παραπανω φαινεται σαν ενας παραξενος τροπος ορισμου αυτου του γινομενου. Ομως, οπως θα δουμε συντομα, η ειδικη μορφη του ορισμου εχει πολλες χρησιμες ιδιοτητες. Ειδικωτερα, θα δειξουμε οτι το διανυσμα $a \times b$ ειναι καθετο και στο a αλλα και στο b.

Για να θυμομαστε πιο ευκολα τον ορισμο του εξωτερικου γινομενου, θα χρησιμοποιησουμε την (ηδη) γνωστη εννοια της οριζουσας. Εστω λοιπον $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ τα δοθεντα διανυσματα. Τοτε, χρησιμοποιωντας την κανονικη βαση του $\mathbf{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, παρατηρουμε οτι

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3 \tag{1.19}$$

Ο παραπανω τυπος μεταφραζεται στη γλωσσα των οριζουσων σαν

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

Μολονοτι η πρωτη γραμμη της συμβολικης οριζουσας στην εξισωση (1.20) περιεχει διανυσματα, την αναπτυσουμε κανονικα σαν να περιειχε μονον αριθμους. Ο συμβολικος τυπος ειναι πιθανως ο πιο ευκολος τροπος να θυμαται κανεις/μια τον υπολογισμο εξωτερικου γινομενου.

Παραδειγμα 21 *Αν $a = (1, 3, 4)$, $b = (2, 7, -5)$, τοτε*

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} e_3 \\ &= (15 - 28)e_1 - (-5 - 8)e_2 + (7 - 6)e_3 = (-43, 13, 1) \end{aligned}$$

Ασκηση 1.6.1 *Δειξτε οτι $a \times a = 0$, για καθε διανυσμα $a \in \mathbf{R}^3$.*

Μια απο τις πιο ενδιαφερουσες ιδιοτητες του εξωτερικου γινομενου δινεται απο το ακολουθο θεωρημα.

Θεωρημα 1.6.4 *Το διανυσμα $a \times b$ ειναι καθετο στο a και στο b.*

Αποδειξη: Για να δειξουμε οτι το $a \times b$ ειναι καθετο στο a, υπολογιζουμε το εσωτερικο γινομενο τους:

$$\begin{aligned} (a \times b) \cdot a &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - a_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ενας παρομοιος υπολογισμος δειχνει οτι $(a \times b) \cdot b = 0$. Ετσι, απο τον (1.18), βλεπουμε οτι το $a \times b$ ειναι καθετο στα a, b. ■

Αν τα a, b παριστανται γραφικα απο κατευθυνομενα ευθυγραμμα τμηματα με την ιδια αρχη, τοτε το προηγουμενο θεωρημα μας λεει οτι το εξωτερικο διανυσμα $a \times b$ εχει την διευθυνση ενος διανυσματος το οποιο ειναι καθετο στο επιπεδο που σχηματιζουν τα a, b. Απο τον ορισμο βγαινει ευκολα οτι η κατευθυνση του $a \times b$ δινεται απο τον κανονα του δεξιου χεριου.

Τωρα που ξερουμε τη διευθυνση του διανυσματος $a \times b$, αυτο που μενει ειναι να βρουμε το μηκος του. Το τελευταιο δινεται απο το επομενο θεωρημα.

Θεωρημα 1.6.5 *Αν θ ειναι η γωνια μεταξυ των a, b (δηλαδη $0 \leq \theta \leq \pi$), τοτε*

$$|a \times b| = |a|\,|b|\,\sin\theta$$

Αποδειξη: Απο τον ορισμο του εξωτερικου γινομενου και του μηκους ενος διανυσματος, εχουμε

$$\begin{aligned}
|a \times b|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&\quad\; a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |a|^2|b|^2 - (a \times b)^2 \\
&= |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2\cos^2\theta \qquad (\text{Θεωρημα } 1.6.2) \\
&= |a|^2|b|^2\,(1 - \cos^2\theta) \\
&= |a|^2|b|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Παιρνοντας την τετραγωνικη ριζα του ανωτερου, και παρατηρωντας οτι $\sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$ επειδη $\sin\theta \geq 0$ οταν $0 \leq \theta \leq \pi$, εχουμε το ζητουμενο αποτελεσμα. ■

Πορισμα 1.6.6 *Δυο μη μηδενικα διανυσματα a, b ειναι παραλληλα εαν και μονον εαν $a \times b = 0$.*

Το θεωρημα 1.6.5 εχει μια ενδιαφερουσα γεωμετρικη ερμηνεια. Αν θεωρησουμε τα διανυσματα a, b σαν πλευρες του παραλληλογραμου που σχηματιζουν, τοτε αν A ειναι το εμβαδον αυτου του παραλληλογραμου, εχουμε

$$A = |a|(|b|\sin\theta) = |a \times b|$$

Δηλαδη, **το μηκος του εξωτερικου γινομενου $a \times b$ ειναι ισο με το εμβαδον του παραλληλογραμου που οριζεται απο τα a και b.**

Παραδειγμα 22 *Βρειτε το εμβαδον του τριγωνου με κορυφες τα σημεια* $P(1,4,6), Q(-2,5,-1)$ *και* $R(1,-1,1)$.

Λυση: Εστω $a = \vec{PQ} = (-3,1,-7)$ και $b = \vec{PR} = (0,-5,-5)$. Υπολογιζουμε το εξωτερικο γινομενο των δυο αυτων διανυσματων:

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-5-35)e_1 - (-15-0)e_2 + (15-0)e_3 = (-40,15,15) \end{aligned}$$

Το εμβαδον E του τριγωνου PQR ειναι το μισο του εμβαδου του παραλληλογραμου που σχηματιζουν τα διανυσματα a, b. Ετσι,

$$E = \frac{1}{2}|a \times b| = \frac{1}{2}\sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = \frac{5\sqrt{82}}{2}$$

■

Το εξωτερικο γινομενο δεν υπακουει στους συνηθεις κανονες της αλγεβρας οι οποιοι ισχυουν για το εσωτερικο γινομενο. Το επομενο θεωρημα μας δινει τους κανονες που ισχυουν.

Θεωρημα 1.6.7 *Αν* $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ *και* $\lambda \in \mathbf{R}$, *τοτε*

1. $a \times b = -b \times a$
2. $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b) = a \times (\lambda b)$
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
4. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
5. $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$
6. $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

Αποδειξη: Ασκηση.

Το γινομενο $a \cdot (b \times c)$ που αναφερει η ιδιοτητα 5 στο παραπανω θεωρημα καλειται το **τριπλο** ή **μειχτο** γινομενο των διανυσματων a, b, c. Απο τους ορισμους του εσωτερικου και εξωτερικου γινομενου ευκολα προκυπτει οτι

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

Η γεωμετρικη σημασια του τριπλου γινομενου δειχνυεται θεωρωντας το παραλληλεπιπεδο που οριζεται απο τα διανυσματα a, b, c. Το εμβαδον της βασης (που ειναι το παραλληλογραμο που οριζεται απο τα b, c) ειναι ισο με $A = |b \times c|$. Αν

θ ειναι η γωνια μεταξυ των a και $b \times c$, τοτε το υψος h του παραλληλεπιπεδου ειναι $h = |a||\cos\theta|$. Ετσι, ο ογκος του παραλληλεπιπεδου ειναι

$$V = Ah = |b \times c|\,|\cos\theta| = |a \cdot (b \times c)|$$

Εχουμε λοιπον δειξει το ακολουθο:

Θεωρημα 1.6.8 *Ο ογκος του παραλληλεπιπεδου που οριζεται απο τα διανυσματα a, b, c ειναι η απολυτη τιμη του τριπλου γινομενου:*

$$V = |a \cdot (b \times c)|$$

1.7 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Ευθειες

Μια ευθεια στο επιπεδο xy καθοριζεται οταν δινονται ενα σημειο της ευθειας και η διευθυνση της ευθειας (η κλιση της, για παραδειγμα). Η εξισωση της ευθειας μπορει τοτε να γραφει απο τον συνηθη τυπο.
Παρομοια, μια ευθεια Λ στον τρισδιαστατο χωρο $\mathbf{R}^3$, μπορει να καθοριστει οταν ξερουμε ενα σημειο της $P = (x_0, y_0, z_0)$ και μια διευθυνση της Λ. Στις τρεις διαστασεις η διευθυνση μιας ευθειας χαρακτηριζεται απο ενα διανυσμα $\mathbf{v}$, το οποιο ειναι παραλληλο στην Λ. Εστω λοιπον $Q = (x, y, z)$ ενα τυχαιο σημειο πανω στην Λ. Θεωρουμε το διανυσμα $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Παρατηρουμε οτι αυτο το διανυσμα ειναι παραλληλο προς το $\mathbf{v}$, και ετσι υπαρχει ενας αριθμος t ετσι ωστε $\overrightarrow{PQ} = t \cdot \mathbf{v}$. Οποτε αν $\mathbf{v} = (a, b, c)$, τοτε

$$\begin{aligned} &(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t \cdot (a, b, c) \ \text{ ή ισοδυναμα} \\ &x = x_0 + ta \quad y = y_0 + tb \quad z = z_0 + tc, \ \ t \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Η (1.22) καλειται μια **παραμετρικη** εξισωση της ευθειας Λ ή παραμετρικες εξισωσεις της Λ. Και λεμε **μια** (και οχι η) παραμετρικη εξισωση της Λ, διοτι οπως ειναι φανερο η παραπανω εξισωση εξαρταται απο το δοθεν σημειο Q της Λ και την διευθυνση της $\mathbf{v}$. Για μια δεδομενη ευθεια Λ, κανενα απο τα δυο αυτα μεγεθη δεν ειναι μοναδικο. Πραγματι, καποιος/α θα μπορουσε να επιλεξει ενα οποιοδηποτε αλλο σημειο της Λ και ενα οποιοδηποτε μη μηδενικο πολλαπλασιο του $\mathbf{v}$. Η νεα παραμετρικη εξισωση της Λ θα ειναι τελειως διαφορετικη απο την παραπανω. Ομως και οι δυο αυτες εξισωσεις χαρακτηριζουν την **ιδια** ευθεια Λ.

Παραδειγμα 23 *Βρειτε μια παραμετρικη εξισωση της ευθειας που διερχεται απο το σημειο $(4, -2, 1)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{v} = (1, 3, -5)$. Στη συνεχεια βρειτε δυο αλλα σημεια πανω στην ευθεια.*

Λυση: Συμφωνα με τα παραπανω, μια παραμετρικη εξισωση ειναι η ακολουθη:

$$x = 4 + 1 \cdot t \quad y = -2 + 3t \quad z = 1 - 5t$$

Διαλεγοντας, για παραδειγμα $t = 1$ και $t = -2$, βρισκουμε τα σημεια $(5, 1, -4)$ και $(2, -8, 11)$. ■

Η εξισωση (1.22) εχει και μια φυσικη ερμηνεια. Εστω η συναρτηση

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \ F(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Ειναι προφανες οτι η F ειναι 1–1 (και επι) και ετσι υπαρχει μια 1–1 αντιστοιχια μεταξυ των σημειων μιας ευθειας και των πραγματικων αριθμων. Απο την αλλη μερια, το σημειο $F(t)$ μπορει να ερμηνευθει σαν το διανυσμα θεσης ενος αντικειμενου που κινειται πανω στην Λ σε καθε χρονικη στιγμη t. Με αυτη την ερμηνεια, μια ευθεια Λ δεν ειναι τιποτα αλλο παρα η τροχια αυτου του αντικειμενου.

Παρατηρωντας, για μια ακομη φορα, την εξισωση (1.22) βλεπουμε οτι οι σταθερες x_0, y_0, z_0 δινουν τις συνιστωσες ενος σημειου της ευθειας, ενω οι συντελεστες του t a, b, c μας δινουν τις συνιστωσες του διανυσματος $\mathbf{v}$ που ειναι παραλληλο στην ευθεια.

Παραδειγμα 24 *Δειξτε οτι οι ευθειες Λ_1 και Λ_2 με εξισωσεις*

$$\begin{array}{lll} x = 1 + t & y = -2 + 3t & z = 4 - t \\ x = 2t & y = 3 + t & z = -3 + 4t \end{array}$$

ειναι **ασυμβατες**. *Δεν εχουν δηλαδη κανενα κοινο σημειο.*

Λυση: Κατ' αρχην παρατηρουμε οτι τα διανυσματα $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$ και $\mathbf{w} = (2, 1, 4)$ ειναι παραλληλα στις Λ_1, Λ_2, αντιστοιχα. Συνεπως οι ευθειες δεν ειναι παραλληλες. Ας δουμε τωρα αν εχουν καποιο κοινο σημειο $P = (x_0, y_0, z_0)$. Απο το κοινο αυτο σημειο θα περνουν και οι **δυο** ευθειες, ή ισοδυναμα, αντικειμενα που κινουνται πανω στις ευθειες Λ_1 και Λ_2 θα περασουν απο το P σε καποιες χρονικες στιγμες t_1 και t_2, αντιστοιχα. Θα εχουμε δηλαδη

$$\begin{array}{rcl} 1 + t_1 & = & 2t_2 \\ -2 + 3t_1 & = & 3 + t_2 \\ 4 - t_1 & = & -3 + 4t_2 \end{array}$$

Αλλα, λυνοντας τις πρωτες δυο εξισωσεις, παιρνουμε $t_1 = \frac{11}{5}$ και $t_2 = \frac{8}{5}$. Ομως οι τιμες αυτες δεν ικανοποιουν την τριτη εξισωση. Ετσι, οι Λ_1 και Λ_2 δεν εχουν κανενα κοινο σημειο. ■

Επιπεδα

Ενα επιπεδο στο χωρο καθοριζεται απο ενα σημειο $P = (x_0, y_0, z_0)$ στο επιπεδο και ενα διανυσμα $\mathbf{v} = (a, b, c)$ καθετο στο επιπεδο. Αυτο το διανυσμα καλειται ενα **καθετο** διανυσμα του επιπεδου. Εστω τυχαιο σημειο $Q = (x, y, z)$ του επιπεδου. Τοτε, το διανυσμα $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ θα πρεπει να ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{v}$. Ετσι εχουμε την εξισωση

$$\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1.23}$$

Η εξισωση (1.23) καλειται εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο P και ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{v}$.

Παραδειγμα 25 *Βρειτε μια εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο* $(2, 4, -1)$ *και ειναι καθετο στο διανυσμα* $\mathbf{v} = (2, 3, 4)$.

Λυση: Απο την (1.23) παιρνουμε

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

■

Απλοποιωντας την (1.23) μπορουμε να ξαναγραψουμε την εξισωση ενος επιπεδου σαν

$$ax + by + cz = d, \quad \text{οπου} \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Στην παραπανω εξισωση παρατηρουμε οτι οχι ολα τα a, b, c ειναι μηδεν (γιατι?). Επισης, οι συντελεστες των x, y, z μας δινουν τις συνιστωσες του καθετου διανυσματος στο επιπεδο.

Παραδειγμα 26 *Βρειτε μια εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια* $P = (1, 0, 2), Q = (3, -1, 6)$ *και* $R = (5, 2, 4)$.

Λυση: Εστω τα διανυσματα $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 4), \mathbf{w} = \overrightarrow{PR} = (4, 2, 2)$. Επειδη τα $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ανηκουν στο επιπεδο, το εξωτερικο τους γινομενο $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{n}$ θα ειναι ειναι διανυσμα καθετο στο επιπεδο. Ετσι

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10e_1 + 12e_2 + 8e_3$$

και μια εξισωση του επιπεδου ειναι η

$$-10(x - 1) + 12(y - 0) + 8(z - 2) = 0$$

■

Παραδειγμα 27 *Βρειτε το σημειο τομης της ευθειας* Λ *με εξισωση:* $x = 2+3t, y = -4t, z = 5+t$ *και του επιπεδου* $4x+5y-2z = 18$.

Λυση: Αντικαθιστουμε τα x, y, z της ευθειας στην εξισωση του επιπεδου, και εχουμε:

$$4(2+3t)+5(-4t)-2(5+t) = 18 \iff t = -2$$

Ετσι, το κοινο σημειο αντιστοιχει στην τιμη $t = -2$. Τοτε $x = -4, y = 8, z = 3$, και το σημειο ειναι το $(-4, 8, 3)$. ■

Δυο επιπεδα ειναι **παραλληλα** οταν τα διανυσματα καθετα σε αυτα ειναι επισης παραλληλα. Για παραδειγμα, τα επιπεδα $x+2y-3z = 4$ και $2x+4y-6z = 3$ ειναι παραλληλα διοτι για τα καθετα τους διανυσματα $\mathbf{v_1} = (1, 2, -3)$ και $\mathbf{v_2} = (2, 4, -6)$ ισχυει $\mathbf{v_2} = 2\mathbf{v_1}$. Αν δυο επιπεδα δεν ειναι παραλληλα, τοτε τεμνονται σε μια ευθεια.

Παραδειγμα 28 *Βρειτε μια παραμετρικη εξισωση της τομης των επιπεδων* $x+y+z = 1$ *και* $x-2y+3z = 1$.

Λυση: Για να βρουμε μια τετοια εξισωση, θα πρεπει να λυσουμε το συστημα αυτων των δυο εξισωσεων. Εχουμε λοιπον, $x+y = 1-z$, $x-2y = 1-3z$ και ετσι $y = \frac{2}{3}z$, $x = 1-\frac{5}{3}z$. Οποτε η λυση του συστηματος ειναι η

$$x = 1-\frac{5}{3}z, \quad y = \frac{2}{3}z, \quad z = z, \quad z \in \mathbf{R}$$

η οποια δεν ειναι τιποτα αλλο απο μια παραμετρικη εξισωση της (ευθειας) τομης των δυο επιπεδων, με παραμετρο, βεβαια, το z.

Παραδειγμα 29 *Βρειτε τον τυπο για την αποσταση* D *μεταξυ ενος σημειου* $P = (x_1, y_1, z_1)$ *και του επιπεδου* $ax+by+cz = d$.

Λυση: Εστω τυχαιο σημειο (x_0, y_0, z_0) του επιπεδου και εστω $\mathbf{b} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$. Εστω $\mathbf{v}$ το καθετο διανυσμα στο επιπεδο, και Θ η γωνια μεταξυ του $\mathbf{b}$ και του $\mathbf{v}$. Τοτε

$$\begin{aligned} D &= |\mathbf{b}||\cos\theta| = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{v}|} \\ &= \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|(ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

Επειδη το σημειο (x_0, y_0, z_0) ανηκει στο επιπεδο, πρεπει να ισχυει $ax_0+by_0+cz_0 = d$, και ετσι εχουμε τον τυπο

$$D = \frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{1.24}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3

1 Βρειτε παραμετρικες εξισωσεις των ευθειων που διερχονται απο το δοθεν σημειο και ειναι παραλληλες στο διανυσμα v.

- $(3,-1,8),\ v=(2,3,1)$
- $(-2,3,6),\ v=(3,-1,5)$
- $(0,1,2),\ v=6e_1+3e_2-7e_3$

2 Βρειτε παραμετρικες εξισωσεις των ευθειων που διερχονται απο τα δοθεντα σημεια.

- $(2,1,8),(3,0,4)$
- $(-1,4,-2),(3,2,-6)$
- $(3,1,\frac{1}{2}),(-1,4,1)$

3 Δειξτε οτι η ευθεια που διερχεται απο τα σημεια $(2,-1,-5)$ και $(8,8,7)$ ειναι παραλληλη στην ευθεια που περναει απο τα $(4,2,-6)$ και $(8,8,2)$. Επισης, βρειτε εξισωση ευθειας που διερχεται απο το $(0,2,-1)$ και ειναι παραλληλη στην ευθεια $x=1+2t, y=3t, z=5-7t$.

4 Αποφασιστε αν οι ευθειες L_1 και L_2 ειναι παραλληλες, ασυμβατες ή αν τεμνονται. Αν τεμνονται, βρειτε το σημειο τομης τους.

$L_1: x=-6t, y=1+9t, z=-3t,$
$L_2: x=1+2s, y=4-3s, z=s$

$L_1: x=1+t, y=2-t, z=3t,$
$L_2: x=2-s, y=1+2s, z=4+s$

5 Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το δοθεν σημειο και ειναι καθετο στο διανυσμα v.

- $(1,4,5),\ v=(7,1,4)$
- $(-5,1,2),\ v=(3,-5,2)$
- $(3,2,1),\ v=(3,2,1)$
- $(1,4,8), v=-e_1+4e_3$

6 Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το δοθεν σημειο και ειναι παραλληλο στο δοθεν επιπεδο:

- $(6,5,-2), x+y-z+1=0$
- $(3,0,8), 2x+5y+8z=17$
- $(-1,3,-8), 3x-4y-6z=9$

7 Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα δοθεντα σημεια:

- $(0,0,0),(1,1,1),(1,2,3)$

- $(-1,1,-1),(1,-1,2),(4,0,3)$
- $(1,0,-3),(0,-2,-4),(4,1,6)$

8 Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το δοθεν σημειο και περιεχει την δοθεισα ευθεια:

- $(1,6,-4), x=1+2t, y=2-3t, z=3-t$
- $(-1,-3,2), x=-1-2t, y=4t, z=2+t$
- $(0,1,2), x=y=z$

9 Αποφασιστε αν τα επομενα επιπεδα ειναι παραλληλα ή οχι. Στην περιπτωση που δεν ειναι παραλληλα, βρειτε παραμετρικες εξισωσεις της τομης τους.

- $x+z=1, y+z=1$
- $-8x-6y+2z=1, z=4x+3y$
- $x+4y-3z=1, -3x+6y+7z=0$
- $x+y-z=2, 3x-4y+5z=6$

10 Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που τα σημεια του απεχουν εξισου απο τα δοθεντα σημεια:

- $(1,1,0),(0,1,1)$
- $(-4,2,1),(2,-4,3)$

11 Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περιεχει την τομη των επιπεδων $x+y-z=2$ και $2x-y+3z=1$ και διερχεται απο το σημειο $(-1,2,1)$.

12 Αποδειξτε οτι η αποσταση μεταξυ των παραλληλων επιπεδων $ax+by+cz=d_1$ και $ax+by+cz=d_2$ ειναι

$$D=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

13 Χρησιμοποιωντας την παραπανω ασκηση, ή με αλλον τροπο, βρειτε την (ελαχιστη) αποσταση μεταξυ των ασυμβατων ευθειων $L_1 : x=1+t, y=1+6t, z=2t$ και $L_2 : x=1+2s, y=5+15s, z=-2+6s$.