

1. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 1, -3)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $4x + 5y + 7z = 4$. (10 M)

2. Αν ισχύει η παρακάτω ισότητα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ -5 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$. (10 M)

3. Δίνονται τα διανύσματα $u, v \in \mathbb{R}^3$ που έχουν μέτρο 2 και 3 αντίστοιχα και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\frac{\pi}{4}$. Να βρεθεί η τιμή του εσωτερικού τους γινομένου $u \cdot v$. (10 M)

4. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= -4 \\ -5x + 8y - 13z &= 12. \end{aligned} \quad (15 \text{ M})$$

5. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{2x} + (2x - 3)^3$. (15 M)

6. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, $g(x) = -2x$ και των ευθειών $x = 1, x = 2$.

Διευκόλυνση: Θεωρήστε γνωστό το εξής: $\int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln 3$. (20 M)

7. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1, x > 0 \text{ και } y(1) = \frac{17}{12}. \quad (20 \text{ M})$$

Ο χρόνος εξέτασης είναι 2 ώρες