ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ – ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Στη στατιστική συμπερασματολογία προσπαθούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για όλο τον πληθυσμό βασιζόμενοι σε ένα δείγμα. Ο πληθυσμός αποτελεί το άγνωστο μέρος, ενώ το δείγμα αποτελεί το γνωστό μέρος. *Η στατιστική είναι επαγωγική επιστήμη, η οποία προσπαθεί να βγάλει συμπεράσματα από τα επί μέρους, το γνωστό τμήμα του πληθυσμού, το δείγμα, για το καθολικό μέρος, ολόκληρο τον πληθυσμό.*

<u>Παράδειγμα.</u> Μια ποικιλία αραβοσίτου καλλιεργείται σε ένα κάμπο και τα προηγούμενα χρόνια είχε μέση απόδοση 750 κιλά/στρέμμα και τυπική απόκλιση 50 κιλά/στρέμμα. Φέτος χρησιμοποιήθηκε δοκιμαστικά ένα καινούριο λίπασμα. 36 αγροί καλλιεργήθηκαν με το νέο λίπασμα και είχαμε απόδοση 765 κιλά/στρέμμα. Μπορούμε να ισχυριστούμε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ ότι το νέο λίπασμα αυξάνει την απόδοση της καλλιέργειας;

Θέτουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

H_0: $\mu_0 = 750$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση) (Θέτουμε κάτι γενικό ή κάτι που ισχύει από παλιά)

H_1: $\mu > 750$ (εναλλακτική υπόθεση) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Γενικεύοντας, οι παραπάνω υποθέσεις μπορεί να έχουν τη μορφή:

H_0: $\mu = \mu_0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση) (Θέτουμε κάτι γενικό ή κάτι που ισχύει από παλιά)

H_1: $\mu > \mu_0$ (εναλλακτική υπόθεση) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Όταν βασιζόμαστε σε ένα δείγμα, πάντοτε υπάρχει κάποια πιθανότητα (ελπίζουμε μικρή) να πάρουμε μια λάθος απόφαση. Σε έναν έλεγχο υποθέσεων μπορούν να γίνουν δύο ειδών σφάλματα:

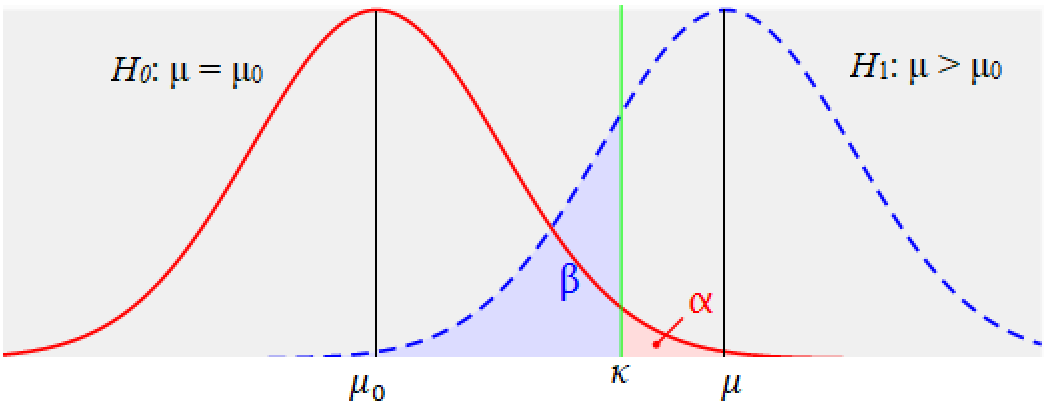
i) Ονομάζεται **σφάλμα τύπου I** η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0, ενώ είναι σωστή. Η πιθανότητα αυτού του σφάλματος συμβολίζεται με α και είναι:

$$\boldsymbol{\alpha = P(\text{απόρριψης της } H_0/H_0 \text{ σωστή})}$$

ii) Ονομάζεται **σφάλμα τύπου II** η αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης H_0, ενώ είναι λάθος. Η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II συμβολίζεται με β και είναι:

$$\boldsymbol{\beta = P(\text{αποδοχής της } H_0/H_0 \text{ λάθος})}$$

Είναι γνωστό ότι ένας σημειακός εκτιμητής της μέσης τιμής μ είναι η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$. Αναζητούμε λοιπόν κάποιο στατιστικό κριτήριο και πιο συγκεκριμένα κάποια κριτική τιμή κ τέτοια ώστε, εάν $\bar{x} > \kappa$ τότε απορρίπτουμε την H_0, ενώ εάν $\bar{x} \leq \kappa$ να μην μπορούμε να την απορρίψουμε.



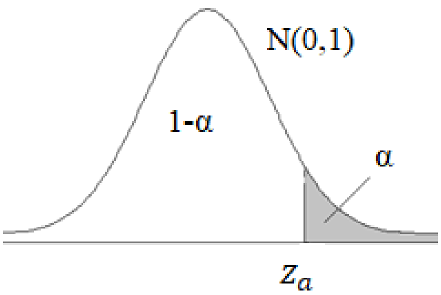
Εάν το δείγμα $X_1,\ X_2, \dots, X_\nu$ προέρχεται από κανονικό πληθυσμό, δηλαδή $X_i \sim N(\mu,\ \sigma),\ i = 1, 2, \dots, \nu$ τότε η τ.μ. $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_\nu}{\nu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)$ ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος. Η ίδια σχέση ισχύει, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ.) και στην περίπτωση που το δείγμα δεν προέρχεται από κανονικό πληθυσμό, αλλά είναι μεγάλο, δηλαδή ν ≥ 30.

Προσπαθώντας λοιπόν να προσδιορίσουμε κάποιο στατιστικό κριτήριο για τις στατιστικές υποθέσεις που θέσαμε έχουμε:

$\alpha = P(\text{να απορρίψουμε την } H_0/H_0 \text{ είναι σωστή}) = P(\bar{x} > \kappa/\mu = \mu_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > \frac{\kappa-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\kappa-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\kappa-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\kappa-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} = z_\alpha \Leftrightarrow \kappa = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$$



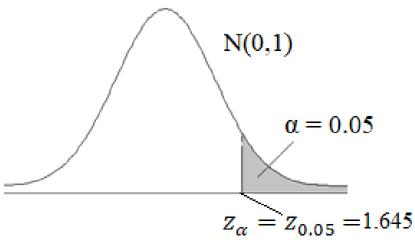
Επομένως προσδιορίσαμε την κριτική τιμή κ, τέτοια ώστε:

Εάν $\bar{x} > \kappa = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ απορρίπτουμε την H_0

ή **εάν** $\boldsymbol{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_\alpha}$ **απορρίπτουμε την $\boldsymbol{H_0}$ (στατιστικό κριτήριο)**

Ελέγχουμε τώρα εάν θα απορρίψουμε την αρχική υπόθεση $H_0: \mu_0 = 750$ του αρχικού παραδείγματος.

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} = \frac{765-750}{50/\sqrt{36}} = \frac{15\sqrt{36}}{50} = 1.8 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$



Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το νέο λίπασμα αυξάνει την απόδοση της καλλιέργειας.

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε συνοπτικά τα στατιστικά κριτήρια (απορριπτικές περιοχές της H_0) για στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, όταν η διασπορά του πληθυσμού σ^2 είναι γνωστή ή άγνωστη, για μικρά ή μεγάλα δείγματα, καθώς επίσης και για ελέγχους υποθέσεων για το ποσοστό p ενός πληθυσμού.

(Α) Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων που αναφέρονται σε ένα δείγμα που προέρχεται από ένα πληθυσμό

	Απορριπτική περιοχή της H_0 όταν			Προϋποθέσεις
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	
	$\frac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_{\alpha/2}$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_\alpha$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} < -z_\alpha$	σ^2 γνωστό και ή α) πληθυσμός κανονικός ή β) $\nu \geq 30$
	$\frac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{s/\sqrt{\nu}} > z_{\alpha/2}$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{\nu}} > z_\alpha$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{\nu}} < -z_\alpha$	σ^2 άγνωστο και $\nu \geq 30$ (οτιδήποτε πληθυσμός)
	$\frac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{s/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha/2}$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha}$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{\nu}} < -t_{\nu-1,\alpha}$	σ^2 άγνωστο και πληθυσμός κανονικός ($\nu < 30$)
$H_0: p = p_0$	$H_1: p \neq p_0$	$H_1: p > p_0$	$H_1: p < p_0$	
	$\frac{\lvert\hat{p} - p_0\rvert}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} > z_{\alpha/2}$	$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} > z_\alpha$	$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} < -z_\alpha$	$\nu p_0 \geq 5$ και $\nu(1-p_0) \geq 5$ $\hat{p}$ το ποσοστό στο δείγμα

Στη συνέχεια παραθέτουμε συνοπτικά τα στατιστικά κριτήρια (απορριπτικές περιοχές της H_0) για στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων για τη σύγκριση των μέσων τιμών μ_1 και μ_2 δύο πληθυσμών ανάλογα εάν τα δείγματα είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα (ζευγαρωτές παρατηρήσεις), εάν είναι μικρά ή μεγάλα ή τέλος εάν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι γνωστές ή άγνωστες. Επίσης παρατίθενται και τα στατιστικά κριτήρια για ελέγχους υποθέσεων για τη σύγκριση των ποσοστών p_1 και p_2 δύο πληθυσμών.

Πριν προχωρήσουμε θα θέλαμε να αναφερθούμε στα *εξαρτημένα δείγματα* ή τις λεγόμενες *ζευγαρωτές παρατηρήσεις*. Πολλές φορές το πείραμά μας πρέπει να γίνει κάτω από *τις ίδιες συνθήκες*. Για παράδειγμα εάν ένας γεωπόνος επιθυμεί να συγκρίνει τις αποδόσεις δύο ποικιλιών σιταριού Α και Β και διαθέτει ν αγρούς, καλύτερα είναι να σχεδιάσει το πείραμά του ως εξής: τους ν αγρούς να τους χωρίσει στη μέση και στο μισό μέρος του αγρού να καλλιεργήσει την ποικιλία Α και στο άλλο μισό την ποικιλία Β, έτσι ώστε να καλλιεργηθούν και οι δύο ποικιλίες κάτω από *τις ίδιες συνθήκες* (σε ίδιας γονιμότητας αγρούς, με τις ίδιες καιρικές συνθήκες, ίδια λίπανση, ίδιος τρόπος άρδευσης, κ.λ.π.). Σε αυτές τις περιπτώσεις οι μετρήσεις μας (αποδόσεις των ποικιλιών Α και Β) είναι *εξαρτημένες*, έχουμε δηλαδή *ζευγαρωτές παρατηρήσεις*. Ένα άλλο παράδειγμα ζευγαρωτών παρατηρήσεων θα μπορούσαμε να έχουμε, εάν θέλαμε να συγκρίνουμε δύο σιτηρέσια Α και Β. Θα είχαμε καλύτερο σχεδιασμό του πειράματός μας, εάν παίρναμε δίδυμα ζώα και στο ένα δίναμε το σιτηρέσιο Α και στο δίδυμό του το σιτηρέσιο Β. Έτσι θα είχαμε πάλι ίδιες συνθήκες στο πείραμά μας (ζώα της ίδιας φυλής, ίδιας ηλικίας, με το ίδιο γενετικό υλικό, κ.λ.π.). Επίσης έχουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις όταν έχουμε μετρήσεις στο ίδιο άτομο, ίδιο ζώο, ίδιο φυτό πριν και μετά από κάποια επέμβαση ή θεραπεία. Σε αυτές τις περιπτώσεις το στατιστικό τεστ που χρησιμοποιούμε αναφέρεται στις διαφορές των ζευγαρωτών παρατηρήσεων (βλέπε ασκήσεις 8 και 12).

(Β) Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων που αναφέρονται σε δύο δείγματα που προέρχονται από δύο πληθυσμούς

	Απορριπτική περιοχή της H_0 όταν			Προϋποθέσεις
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$	
	$\frac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} > z_{\alpha/2}$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} > z_{\alpha}$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} < -z_{\alpha}$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστά και / ή α) πληθυσμοί κανονικοί ή β) $\nu_1, \nu_2 \geq 30$
	$\frac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta\rvert}{\sqrt{\frac{s_1^2}{\nu_1} + \frac{s_2^2}{\nu_2}}} > z_{\alpha/2}$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{\nu_1} + \frac{s_2^2}{\nu_2}}} > z_{\alpha}$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{\nu_1} + \frac{s_2^2}{\nu_2}}} < -z_{\alpha}$	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα και $\nu_1, \nu_2 \geq 30$ (οτιδήποτε πληθυσμοί)
	$\frac{\lvert\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta\rvert}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} > t_{\nu,\alpha/2}$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} > t_{\nu,\alpha}$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} < -t_{\nu,\alpha}$	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, ν_1 ή $\nu_2 < 30$, πληθυσμοί κανονικοί, όπου $\nu = \nu_1 + \nu_2 - 2$ και $s^2 = \frac{(\nu_1 - 1)s_1^2 + (\nu_2 - 1)s_2^2}{\nu_1 + \nu_2 - 2}$
	$\frac{\lvert\bar{d} - \delta\rvert}{s_d/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha/2}$	$\frac{\bar{d} - \delta}{s_d/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha}$	$\frac{\bar{d} - \delta}{s_d/\sqrt{\nu}} < -t_{\nu-1,\alpha}$	Ζευγαρωτές παρατηρήσεις, $\nu < 30^*$, $\bar{d}$ και s_d μέσος και τυπική απόκλιση των διαφορών $d_i = x_i - y_i$ *αν $\nu \geq 30$ ίδιοι τύποι με z_α αντί $t_{\nu-1,\alpha}$
$H_0: p_1 = p_2$	$H_1: p_1 \neq p_2$	$H_1: p_1 > p_2$	$H_1: p_1 < p_2$	
	$\frac{\lvert\hat{p}_1 - \hat{p}_2\rvert}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2})}} > z_{\alpha/2}$	$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2})}} > z_{\alpha}$	$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2})}} < -z_{\alpha}$	$\nu_i\hat{p}_i \geq 5$ και $\nu_i(1 - \hat{p}_i) \geq 5$ (i =1, 2) $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{\nu_1}$ το ποσοστό στο 1ο δείγμα, $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{\nu_2}$ το ποσοστό στο 2ο δείγμα, $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{\nu_1 + \nu_2}$ το μέσο ποσοστό στα δύο δείγματα

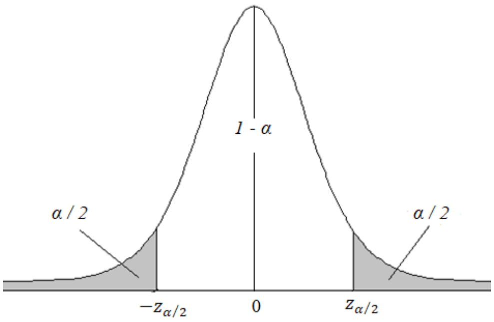
Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, ένας εκτιμητής της μέσης τιμής μ ενός πληθυσμού είναι η μέση τιμή του δείγματος $\bar{X}$, η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu}{\nu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)$$

Αναζητούμε ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, όταν η διασπορά του πληθυσμού σ^2 είναι γνωστή. Έστω (x_1, x_2) το διάστημα που ψάχνουμε να βρούμε. Τότε:

$$P(x_1 < \bar{X} < x_2) = 1 - a \Leftrightarrow P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} < \frac{x_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(z_1 < Z < z_2) = 1 - a$$



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα της N(0, 1) θα πρέπει $z_1 = -z_{a/2}$ και $z_2 = z_{a/2}$. Συνεπώς θα έχουμε:

$$P\left(-z_{a/2} < Z < z_{a/2}\right) = P\left(-z_{a/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} < z_{a/2}\right) = P\left(\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} < \mu < \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \alpha$$

Επομένως βρήκαμε ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, όταν η διασπορά του πληθυσμού σ^2 είναι γνωστή:

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2} \qquad \text{ή} \qquad \left(\bar{x} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}, \quad \bar{x} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)$$

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε συνοπτικά τα 100(1-α)% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, όταν η διασπορά του πληθυσμού σ^2 είναι γνωστή ή άγνωστη, για μικρά ή μεγάλα δείγματα, καθώς επίσης και τα 100(1-α)% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ των μέσων τιμών δύο πληθυσμών, ανάλογα εάν τα δείγματα είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα (ζευγαρωτές παρατηρήσεις), εάν είναι μικρά ή μεγάλα ή τέλος εάν οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι γνωστές ή άγνωστες. Επίσης παρατίθενται και τα 100(1-α)% διαστήματα εμπιστοσύνης για το ποσοστό p ενός πληθυσμού ή για τη διαφορά $p_1 - p_2$ των ποσοστών δύο πληθυσμών.

(Γ) $100(1-\alpha)\%$ Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Παράμετρος πληθυσμού (ων)	Προϋποθέσεις	$100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης
(Α) Ένας πληθυσμός		
μ	σ^2 γνωστό και / ή α) πληθυσμός κανονικός ή β) $\nu \geq 30$	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}$
	σ^2 άγνωστο, $\nu \geq 30$ (οτιδήποτε πληθυσμός)	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}$
	σ^2 άγνωστο και πληθυσμός κανονικός ($\nu < 30$)	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{\nu}} t_{\nu-1,\alpha/2}$
p *(ποσοστό)*	$\nu\hat{p} \geq 5$ και $\nu(1-\hat{p}) \geq 5$ $\hat{p}$ το ποσοστό στο δείγμα	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\nu}}$
(Β) Δύο πληθυσμοί		
$\mu_1 - \mu_2$	${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ γνωστά και / ή α) πληθυσμοί κανονικοί ή β) $\nu_1, \nu_2 \geq 30$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{\nu_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{\nu_2}}$
	${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ άγνωστα και $\nu_1, \nu_2 \geq 30$ (οτιδήποτε πληθυσμοί)	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{{s_1}^2}{\nu_1} + \frac{{s_2}^2}{\nu_2}}$
	${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$ άγνωστα, ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$, πληθυσμοί κανονικοί, ν_1 ή $\nu_2 < 30$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}$ $s^2 = \frac{(\nu_1 - 1){s_1}^2 + (\nu_2 - 1){s_2}^2}{\nu_1 + \nu_2 - 2}$
	ζευγαρωτές παρατηρήσεις, $\nu < 30$ Αν $\nu \geq 30$ οι ίδιοι τύποι, αλλά με $z_{\alpha/2}$ αντί $t_{\nu-1,\alpha/2}$	$\bar{d} \pm \frac{s_d}{\sqrt{\nu}} t_{\nu-1,\alpha/2}$ $\bar{d}$ και ${s_d}^2$ μέσος και διασπορά των $d_i = x_i - y_i$
$p_1 - p_2$ (ποσοστά)	$\nu_i\hat{p}_i \geq 5$ και $\nu_i(1-\hat{p}_i) \geq 5$, $i = 1, 2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{\nu_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{\nu_2}}$

Λύσεις ασκήσεων από το **φυλλάδιο 6 – Ασκήσεις σε Στατιστικούς Ελέγχους Υποθέσεων και Διαστήματα Εμπιστοσύνης**

1. Το όριο αντοχής ενός τύπου καλωδίων έχει μέση τιμή 1800 κιλά και τυπική απόκλιση 100 κιλά. Η εταιρεία που φτιάχνει τα καλώδια ισχυρίζεται ότι μια βελτίωση στη μέθοδο κατασκευής αύξησε το όριο αντοχής. Για να το επαληθεύσουμε, δοκιμάζουμε 50 νέα καλώδια. Εάν το μέσο όριο αντοχής τους βρέθηκε 1850 κιλά, είναι σωστός ο ισχυρισμός της εταιρείας σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.01;

Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (όριο αντοχής ενός τύπου καλωδίων)

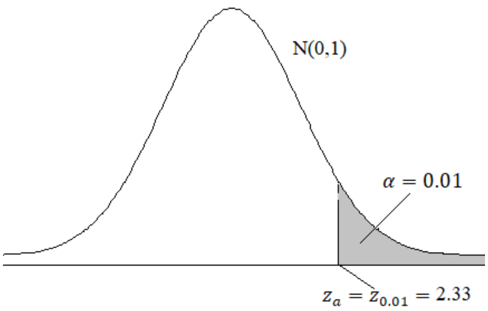
$H_0: \mu_0 = 1800$ (αρχική υπόθεση) (Θέτουμε κάτι γενικό ή κάτι που ισχύει από παλιά)

$H_1: \mu > 1800$ (εναλλακτική υπόθεση) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε: *ν=50* το μέγεθος του δείγματος, $\bar{x}$ *=1850* ο μέσος όρος του δείγματος και σ *=100* η τυπική απόκλιση του πληθυσμού. Επειδή η διακύμανση του πληθυσμού είναι γνωστή $\sigma^2 = 100^2$ και επιπλέον έχουμε μεγάλο δείγμα *ν=50 >30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_a$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας έχουμε: $\frac{1850-1800}{100/\sqrt{50}} = \frac{50\sqrt{50}}{100} = 3.53 > z_a = z_{0.01} = 2.33$



Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 1%. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η βελτίωση στη μέθοδο κατασκευής αύξησε το μέσο όριο αντοχής των καλωδίων.

2. Ένας κατασκευαστής συρματόσχοινων ισχυρίζεται ότι κάθε συρματόσχοινο ενός ορισμένου τύπου αντέχει σε μέγιστο φορτίο 8000 κιλών. Δοκιμάζουμε 6 τέτοια συρματόσχοινα και βρίσκουμε μέσο φορτίο 7750 κιλά με τυπική απόκλιση 145 κιλά. Μπορούμε να υποστηρίξουμε τον ισχυρισμό του κατασκευαστή σε επίπεδο σημαντικότητας **(α)** 0.05, **(β)** 0.01;

Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού. Διατυπώνουμε τις υποθέσεις:

$H_0: \mu_0 = 8000$ (αρχική υπόθεση)

$H_1: \mu < 8000$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε: *ν=6* (μικρό δείγμα), $\bar{x}$ *=7750* ο μέσος όρος του δείγματος και *s=145* η τυπική απόκλιση του δείγματος. Επειδή η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=6 <30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{\nu}} < -\, t_{\nu-1,a}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

(α) Αντικαθιστώντας σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{7750-8000}{145/\sqrt{6}} = -4.22 < -t_{\nu-1,a} = -t_{5,0.05} = -2.015$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς δεν ισχύει ο ισχυρισμός του κατασκευαστή.

(β) Σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.01 έχουμε:

$-4.22 < -t_{\nu-1,a} = -t_{5,0.01} = -3.365$

Επομένως και σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, η H_0 απορρίπτεται και δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός του κατασκευαστή.

3. Σε ένα πείραμα που πρόκειται να εκτελεστεί, εικάζεται ότι το pH του εδάφους μπορεί να επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τα αποτελέσματα του πειράματος. Για το λόγο αυτό, πάρθηκαν 10 δείγματα χώματος από ένα αγροτεμάχιο, υποψήφιο για τη διεξαγωγή του πειράματος και προσδιορίστηκε το pH σε κάθε δείγμα:

6.5 5.9 6.8 6.1 5.7 5.8 6.6 6.5 6.4 6.7

α) Δώστε 98% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο pH του αγροτεμαχίου. **β)** Αν έχει αποφασιστεί ότι το πείραμα θα εκτελεστεί σε αγροτεμάχιο του οποίου το μέσο pH είναι μεγαλύτερο από 6, τι απόφαση πρέπει να ληφθεί για το εν λόγω αγροτεμάχιο σε επίπεδο σημαντικότητας 5%; Διατυπώστε κατάλληλες στατιστικές υποθέσεις και κάντε κατάλληλο έλεγχο.

Προσδιορίζουμε καταρχάς τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} = \frac{6.5 + 5.9 + \cdots + 6.7}{10} = 6.3$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(6.5-6.3)^2 + (5.9-6.3)^2 + \cdots + (6.7-6.3)^2}{10-1} = 0.155$$

Επομένως $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.155} = 0.39$

α) Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=10 <30,* το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{\nu}}\, t_{\nu-1,\alpha/2}$$

Όμως όταν ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α = 0.02*, επομένως $t_{\nu-1,\alpha/2} = t_{10-1,\,0.02/2} = t_{9,0.01} = 2.821$

Επομένως το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$$6.3 \pm \frac{0.39}{\sqrt{10}} \cdot 2.821 \quad \text{ή} \quad 6.3 \pm 0.35 \quad \text{ή} \quad (5.95,\ 6.65)$$

Επομένως με 98% βεβαιότητα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το μέσο pH του αγροτεμαχίου κυμαίνεται από 5.95 έως 6.65.

β) Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: \mu_0 = 6$ (αρχική υπόθεση)

$H_1: \mu > 6$ (εναλλακτική υπόθεση)

Επειδή η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=10 <30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,a}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{6.3-6}{0.39/\sqrt{10}} = 2.4 > t_{\nu-1,a} = t_{10-1,0.05} = t_{9,0.05} = 1.833$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας 5%. Συνεπώς βασιζόμενοι στα πειραματικά δεδομένα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μέσο pH του αγροτεμαχίου είναι μεγαλύτερο από 6.

4. Οι κάτοικοι μιας περιοχής ανησυχούν για τη συγκέντρωση μονοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα κατά τις μεσημεριανές ώρες. Η αρμόδια κρατική υπηρεσία, μετά από διαμαρτυρία των κατοίκων, επέλεξε σύμφωνα με ένα σχέδιο τυχαίας δειγματοληψίας, 16 σημεία της περιοχής και έκανε 16 μετρήσεις (μια μέτρηση σε κάθε σημείο). Οι μετρήσεις αυτές έδωσαν μέση συγκέντρωση μονοξειδίου του άνθρακα 55.9mg/m^3 με τυπική απόκλιση 6.5mg/m^3. Το επιτρεπτό για την υγεία των κατοίκων όριο μονοξειδίου του άνθρακα είναι 55mg/m^3. **α)** Με βάση τα ευρήματα στο δείγμα, και σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, τι πρέπει να ανακοινώσει η κρατική υπηρεσία στους κατοίκους; **β)** Δώστε 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση συγκέντρωση μονοξειδίου του άνθρακα. **γ)** Μια περιβαλλοντική οργάνωση πίεσε την κρατική υπηρεσία να επαναλάβει τον έλεγχο με μεγαλύτερο δείγμα. Η κρατική υπηρεσία δέχθηκε και ένα νέο τυχαίο δείγμα μεγέθους 60 που πήρε, έδωσε μέση συγκέντρωση μονοξειδίου του άνθρακα 56.2mg/m^3 με τυπική απόκλιση 5.2mg/m^3. Τι πρέπει να ανακοινώσει η κρατική υπηρεσία στους κατοίκους με βάση τα ευρήματα στο νέο δείγμα σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

α) Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: \mu_0 = 55$ (αρχική υπόθεση)

$H_1: \mu > 55$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε: *ν=16* (μικρό δείγμα), $\bar{x}$ =55.9*mg/m*^{3} ο μέσος όρος του δείγματος και *s=6.5mg/m*^{3} η τυπική απόκλιση του δείγματος. Επειδή η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=16 <30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,a}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{55.9-55}{6.5/\sqrt{16}} = 0.55 < t_{\nu-1,a} = t_{15,0.05} = 1.753$$

Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς η κρατική υπηρεσία θα πρέπει να ανακοινώσει στους κατοίκους ότι με βάση τα πειραματικά δεδομένα δεν υπάρχει υπέρβαση του επιτρεπτού για την υγεία των κατοίκων ορίου του μονοξειδίου του άνθρακα.

β) Ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη μέση τιμή ενός πληθυσμού (συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα). Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=16 <30,* το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{\nu}} t_{\nu-1,\alpha/2}$$

Όμως όταν ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης το στατιστικό σφάλμα θα είναι

α = 0.02, επομένως $t_{\nu-1,\alpha/2} = t_{16-1,\,0.02/2} = t_{15,0.01}$=2.602

Επομένως το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$55.9 \pm \frac{6.5}{\sqrt{16}} \cdot 2.602$ ή 55.9 ± 4.23 ή (51.67, 60.13)

γ) Οι στατιστικές υποθέσεις παραμένουν οι ίδιες:

H_0: $\mu_0 = 55$ (αρχική υπόθεση)

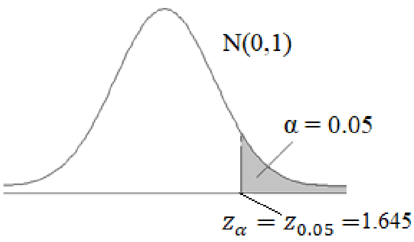
H_1: $\mu > 55$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα νέα πειραματικά δεδομένα έχουμε *ν=60* (μεγάλο δείγμα), $\bar{x}$ =56.2*mg/m*^{3} ο μέσος όρος του νέου δείγματος και *s=5.2mg/m*^{3} η τυπική του απόκλιση. Επειδή η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, αλλά σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μεγάλο δείγμα *ν=60 >30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{\nu}} > z_a$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{56.2-55}{5.2/\sqrt{60}} = 1.788 > z_a = z_{0.05} = 1.645$$



Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς η κρατική υπηρεσία θα πρέπει να ανακοινώσει στους κατοίκους ότι με βάση τα νέα πειραματικά δεδομένα υπάρχει υπέρβαση του επιτρεπτού για την υγεία των κατοίκων ορίου του μονοξειδίου του άνθρακα.

5. Σε δύο Τμήματα του Γ.Π.Α. δόθηκαν σε μια εξέταση για το μάθημα της Στατιστικής τα ίδια θέματα. Από το 1ο Τμήμα πήραν μέρος στην εξέταση 40 φοιτητές και η μέση τους βαθμολογία ήταν 74 μονάδες (με άριστα το 100) με τυπική απόκλιση 8, ενώ από το 2ο Τμήμα προσήλθαν στην εξέταση 50 φοιτητές, οι οποίοι πέτυχαν μέση βαθμολογία 78, με τυπική απόκλιση 7. Ήταν στατιστικά σημαντική η διαφορά στην απόδοση των δύο τμημάτων σε επίπεδο σημαντικότητας **(α)** 0.05, **(β)** 0.01.

(α) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών. Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ ή $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

1ο Τμήμα : $\nu_1 = 40,\quad \bar{x}_1 = 74,\quad s_1 = 8$

2ο Τμήμα : $\nu_2 = 50,\quad \bar{x}_2 = 78,\quad s_2 = 7$

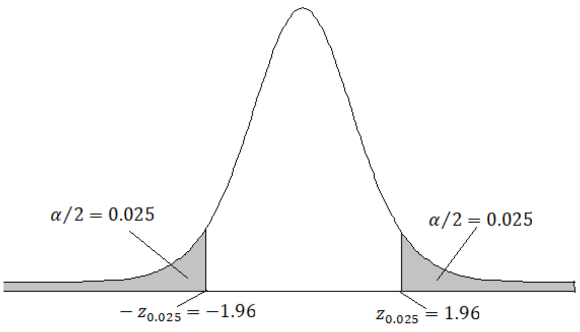
Επειδή οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι άγνωστες και επιπλέον έχουμε μεγάλα δείγματα ν_1=40 >30 και ν_2=50 >30, η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

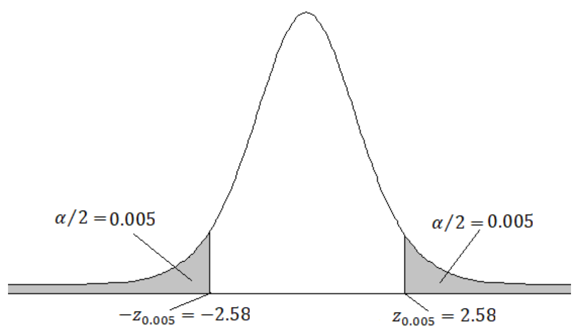
Εάν

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{\nu_1} + \frac{s_2^2}{\nu_2}}} > z_{\alpha/2}$$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας, με δ=0 και σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{|74-78|}{\sqrt{\frac{8^2}{40} + \frac{7^2}{50}}} = 2.5 > z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$$





Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις βαθμολογίες των δύο τμημάτων.
(β) Εάν το επίπεδο σημαντικότητας του στατιστικού τεστ είναι α = 0.01, τότε $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$
και η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου δεν ισχύει, καθώς:

$$2.5 < z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$$

Συνεπώς σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 και επομένως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις βαθμολογίες των δύο τμημάτων σε επίπεδο σημαντικότητας 1% .

6. Προκειμένου να μετρηθεί η περιεκτικότητα κάποιας ουσίας στα νερά ενός ποταμού, ελήφθησαν 25 υδάτινα δείγματα από τον ποταμό. Η μέση περιεκτικότητα της ουσίας στο δείγμα των 25 μετρήσεων ήταν 50 mg/lt με τυπική απόκλιση 3.5 mg/lt. Για να συγκριθεί η περιεκτικότητα της ουσίας αυτής στον ποταμό με την περιεκτικότητα της ίδιας ουσίας σε έναν παραπόταμό του, ελήφθησαν και 22 δείγματα νερού από τον παραπόταμο, που είχαν μέση περιεκτικότητα 55.3 mg/lt και τυπική απόκλιση 3.2 mg/lt. **(α)** Σε επίπεδο σημαντικότητας 1% αποδεικνύουν τα δεδομένα αυτά ότι η μέση συγκέντρωση της ουσίας στον παραπόταμο είναι αυξημένη σε σχέση με τον ποταμό; **(β)** Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% αποδεικνύουν τα δεδομένα αυτά ότι η μέση συγκέντρωση της ουσίας στον παραπόταμο είναι αυξημένη σε σχέση με τον κύριο ποταμό κατά περισσότερο από 3 mg/lt; **(γ)** Δώστε 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση συγκέντρωση της ουσίας στον κύριο ποταμό. **(δ)** Δώστε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων της ουσίας μεταξύ παραποτάμου και κύριου ποταμού.

(α) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών. Έστω μ_1 η μέση συγκέντρωση της ουσίας στον ποταμό και μ_2 η μέση συγκέντρωση της ουσίας στον παραπόταμο. Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ ή $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

Δείγματα από τον ποταμό: $\nu_1 = 25$, $\bar{x}_1 = 50\text{mg/lt}$, $s_1 = 3.5\text{mg/lt}$

Δείγματα από τον παραπόταμο: $\nu_2 = 22$, $\bar{x}_2 = 55.3\text{mg/lt}$, $s_2 = 3.2\text{mg/lt}$

Από τη διατύπωση του προβλήματος είναι προφανές ότι τα δείγματα έχουν ληφθεί το ένα *ανεξάρτητα* από το άλλο. Επιπλέον κάνοντας τις παραδοχές ότι προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς με *άγνωστες αλλά ίσες* διακυμάνσεις και λαμβάνοντας υπόψιν ότι έχουμε *μικρά δείγματα* ν_1=25 < 30 και ν_2=22 < 30, οδηγούμαστε στην παρακάτω περιοχή απόρριψης της H_0:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} < -t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha}$$

όπου

$$s^2 = \frac{(\nu_1 - 1)s_1^2 + (\nu_2 - 1)s_2^2}{\nu_1 + \nu_2 - 2}$$

η εκτίμηση της κοινής διασποράς. Υπολογίζουμε καταρχάς το s^2 και στη συνέχεια ελέγχουμε εάν ισχύει το στατιστικό κριτήριο:

$$s^2 = \frac{(25 - 1)\, 3.5^2 + (22 - 1)\, 3.2^2}{25 + 22 - 2} = 11.31 \quad \text{επομένως} \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{11.31} = 3.36$$

Αντικαθιστώντας και με δ = 0, η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι:

$$\frac{50 - 55.3}{3.36 \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{22}}} = -5.4 < -t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha} = -t_{25+22-2,0.01} = -t_{45,0.01} = -2.33$$

Ισχύει η ανισότητα, επομένως απορρίπτουμε την H_0. Επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας 1% μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέση συγκέντρωση της ουσίας στον παραπόταμο είναι αυξημένη σε σχέση με τον ποταμό.

(β) $H_0: \mu_2 - \mu_1 = 3$ ή ισοδύναμα $H_0: \mu_1 - \mu_2 = -3$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_2 - \mu_1 > 3$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < -3$ (εναλλακτική υπόθεση)

Εάν πάρουμε το 1ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων έχουμε την παρακάτω περιοχή απόρριψης της H_0:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} > t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha}$$

ενώ εάν πάρουμε το ισοδύναμο 2ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων η περιοχή απόρριψης της H_0 θα είναι:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}} < -t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha}$$

όπου

$$s^2 = \frac{(\nu_1 - 1)s_1^2 + (\nu_2 - 1)s_2^2}{\nu_1 + \nu_2 - 2}$$

Παίρνοντας το 1ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων έχουμε:

$$\frac{55.3-50-3}{3.36\cdot\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{22}}}=2.34>t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha}=t_{25+22-2,0.05}=t_{45,0.05}=1.646$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση συγκέντρωση της ουσίας στον παραπόταμο είναι αυξημένη σε σχέση με τον κύριο ποταμό κατά περισσότερο από 3 mg/lt. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν παίρναμε το 2ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων και την αντίστοιχη περιοχή απόρριψης της H_0.

(γ) Ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (μέση συγκέντρωση της ουσίας στον κύριο ποταμό).

Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=25 <30*, το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{\nu}}t_{\nu-1,\alpha/2}$$

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

Δείγματα από τον ποταμό: $\nu_1=25,\quad \bar{x}_1=50\text{mg/lt},\quad s_1=3.5\text{mg/lt}$

Όταν ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης το στατιστικό σφάλμα θα είναι α = 0.02, επομένως $t_{\nu-1,\alpha/2}=t_{25-1,\,0.02/2}=t_{24,0.01}$=2.492

Επομένως το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$50\pm\frac{3.5}{\sqrt{25}}\cdot 2.492$ ή 50 ± 1.74 ή (48.26, 51.74)

(δ) Ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων της ουσίας μεταξύ παραποτάμου και κύριου ποταμού, δηλαδή ζητείται ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών (παραπόταμος – ποταμός).

Καθώς οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών $\sigma_1{}^2$ και $\sigma_1{}^2$ είναι *άγνωστες* και επιπλέον έχουμε *μικρά δείγματα* ν_1=25 < 30 και ν_2=22 < 30, το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_2-\mu_1$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}_2-\bar{x}_1\pm t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha/2}\cdot s\cdot\sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}$$

όπου

$$s^2=\frac{(\nu_1-1){s_1}^2+(\nu_2-1){s_2}^2}{\nu_1+\nu_2-2}$$

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

Δείγματα από τον ποταμό: $\nu_1=25,\quad \bar{x}_1=50\text{mg/lt},\quad s_1=3.5\text{mg/lt}$

Δείγματα από τον παραπόταμο: $\nu_2=22,\quad \bar{x}_2=55.3\text{mg/lt},\quad s_2=3.2\text{mg/lt}$

Η κοινή διακύμανση s^2 έχει ήδη υπολογιστεί από το (α) ερώτημα και είναι: s^2 =11.31, επομένως $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{11.31}$ =3.36. Όταν ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης, το στατιστικό σφάλμα είναι $\alpha = 0.05$, επομένως το: $t_{\nu_1+\nu_2-2,\alpha/2} = t_{25+22-2,\,0.05/2} = t_{45,0.025} = 1.96$

Αντικαθιστώντας υπολογίζουμε το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_2 - \mu_1$:

55.3 – 50 $\pm$ 1.96 $\cdot$ 3.36 $\cdot \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{22}}$ = 5.3 ± 1.93 και τελικά το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είναι: (3.37, 7.23). Επομένως με 95% βεβαιότητα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων της ουσίας μεταξύ παραποτάμου και κύριου ποταμού κυμαίνεται από 3.37 έως 7.23 mg/lt.

8. Για να ελέγξουμε την αποτελεσματικότητα δύο σιτηρεσίων Α και Β στην γαλακτοπαραγωγή των προβάτων κάποιας φυλής, πήραμε εννέα ζεύγη δίδυμων προβατινών της φυλής αυτής και εφαρμόσαμε το σιτηρέσιο Α στη μια προβατίνα του ζεύγους και το Β στην άλλη. Η ημερήσια γαλακτοπαραγωγή σε λίτρα φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

Σιτηρέσιο Α	9.1	8.2	7.1	9.5	8.4	7.7	7.2	7.8	9.3
Σιτηρέσιο Β	10.2	10.1	9.1	8.3	8.4	7.8	7.8	9.4	10.7

α) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν το σιτηρέσιο Β είναι καλύτερο από το Α.

β) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν με το σιτηρέσιο Β επιτυγχάνεται μέση παραγωγή γάλακτος μεγαλύτερη από 9 λίτρα.

γ) Να δοθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση γαλακτοπαραγωγή των προβατινών που έλαβαν το σιτηρέσιο Β.

α) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών. Έστω μ_A η μέση γαλακτοπαραγωγή του σιτηρεσίου Α και μ_B η μέση γαλακτοπαραγωγή του σιτηρεσίου Β. Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0\colon \mu_A = \mu_B$ ή $H_0\colon \mu_A - \mu_B = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1\colon \mu_A < \mu_B$ $H_1\colon \mu_A - \mu_B < 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

Τα δείγματα είναι εξαρτημένα, δηλαδή έχουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις, καθώς τα δύο σιτηρέσια εφαρμόζονται σε δίδυμες προβατίνες (ζώα της ίδιας φυλής, ίδιας ηλικίας, με το ίδιο γενετικό υλικό) και επομένως το πείραμα γίνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Σε αυτήν την περίπτωση οι στατιστικές υποθέσεις διατυπώνονται ως εξής:

$H_0\colon \mu_{A-B} = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1\colon \mu_{A-B} < 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

και η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν

$\frac{\bar{d}-\delta}{s_d/\sqrt{\nu}} < -\,t_{\nu-1,a}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

όπου $\bar{d}$ και s_d η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των διαφορών $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$, $i = 1,2,\dots,9$
Επομένως για να ελέγξουμε τις στατιστικές υποθέσεις μας θα πρέπει να βρούμε τις διαφορές $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$, $i = 1,2,\dots,9$ και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση ($\bar{d}$ και s_d) των διαφορών. Επομένως:

Σιτηρέσιο Α (x_{Ai})	9.1	8.2	7.1	9.5	8.4	7.7	7.2	7.8	9.3
Σιτηρέσιο Β (x_{Bi})	10.2	10.1	9.1	8.3	8.4	7.8	7.8	9.4	10.7
$d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$	-1.1	-1.9	-2	1.2	0	-0.1	-0.6	-1.6	-1.4

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα $\bar{d}$ και s_d από τους γνωστούς τύπους της μέσης τιμής και της διασποράς:

$$\bar{d} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} d_i$$

$$s_d{}^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} d_i^2 - \nu\bar{d}^2\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\bar{d} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} d_i = \frac{(-1.1) + (-1.9) + \cdots + (-1.4)}{9} = -0.83$$

$$s_d{}^2 = \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} d_i^2 - \nu\bar{d}^2\right) = \frac{[(-1.1)^2 + (-1.9)^2 + \cdots + (-1.4)^2] - 9\cdot(-0.83)^2}{9-1} = 1.11$$

και η τυπική απόκλιση των διαφορών d_i είναι: $s_d = \sqrt{s_d{}^2} = \sqrt{1.11} = 1.05$

Αντικαθιστούμε στην παρακάτω σχέση του στατιστικού κριτηρίου, με δ=0 και έχουμε:
Εάν

$\frac{\bar{d}-\delta}{s_d/\sqrt{\nu}} < -\,t_{\nu-1,a}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

$$\frac{-0.83}{1.05/\sqrt{9}} = -2.37 < -\,t_{\nu-1,a} = -\,t_{9-1,0.05} = -\,t_{8,0.05} = -1.86$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς το σιτηρέσιο Β αυξάνει τη γαλακτοπαραγωγή σε σχέση με το σιτηρέσιο Α.

β) Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

H_0: $\mu_0 = 9$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

H_1: $\mu_B > 9$ (εναλλακτική υπόθεση) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Καταρχάς υπολογίζουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_{Bi}}{\nu_B} = \frac{x_{B1} + x_{B2} + \cdots + x_{B9}}{9} = \frac{10.2 + 10.1 + \cdots + 10.7}{9} = 9.09$$

$$s_B^2 = \frac{1}{\nu_B - 1}\sum_{i=1}^{\nu}(x_{Bi} - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{\nu_B - 1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_{Bi}^2 - \nu_B\, \bar{x}_B{}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9-1}[(10.2^2 + 10.1^2 + \cdots + 10.7^2) - 9 \cdot (9.09)^2] = 1.17$$

Επομένως $s_B = \sqrt{s_B^2} = \sqrt{1.17} = 1.08$

Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα *ν=9<30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}_B - \mu_0}{s_B/\sqrt{\nu_B}} > t_{\nu_B - 1,\alpha}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας σε επίπεδο σημαντικότητας *α = 0.05* έχουμε:

$$\frac{9.09-9}{1.08/\sqrt{9}} = 0.25 < t_{\nu-1,\alpha} = t_{9-1,0.05} = t_{8,0.05} = 1.86$$

Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση γαλακτοπαραγωγή των προβατινών που έλαβαν το σιτηρέσιο Β είναι μεγαλύτερη από 9 λίτρα.

γ) Ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (γαλακτοπαραγωγή των προβατινών που έλαβαν το σιτηρέσιο Β).

Από τα πειραματικά δεδομένα υπολογίσαμε: $\bar{x}_B = 9.09$ και $s_B = 1.08$

Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα $\nu_B = 9 < 30$, το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}_B \pm \frac{s_B}{\sqrt{\nu_B}} t_{\nu_B - 1,\, \alpha/2}$$

Όμως όταν ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης, το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α=0.05*, επομένως $\alpha/2 = 0.025$ και $t_{\nu_B-1,\,\alpha/2} = t_{9-1,0.025} = t_{8,0.025} = 2.306$

Επομένως το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$9.09 \pm \frac{1.08}{\sqrt{9}} \cdot 2.306$ ή 9.09 ± 0.83 ή $(8.26, 9.92)$

Επομένως με 95% βεβαιότητα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση γαλακτοπαραγωγή των προβατινών που έλαβαν το σιτηρέσιο Β κυμαίνεται από 8.26 έως 9.92.

9. Σε μια απογραφή που έγινε πριν από πέντε χρόνια, βρέθηκε ότι το 10% των προβάτων της χώρας πάσχουν από κάποια ασθένεια. Για να ελεγχθεί αν το ποσοστό αυτό άλλαξε, πάρθηκε τυχαίο δείγμα από 500 πρόβατα και σε 47 από αυτά παρατηρήθηκε η συγκεκριμένη ασθένεια. **α)** Διαφέρει το ποσοστό των άρρωστων ζώων σήμερα, από αυτό που βρέθηκε στην απογραφή πριν από πέντε χρόνια, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%; **β)** Δώστε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το σημερινό μέσο ποσοστό των άρρωστων ζώων.

Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για το άγνωστο ποσοστό ενός πληθυσμού (ποσοστό των προβάτων της χώρας που πάσχουν από κάποια ασθένεια).

H_0: $p_0 = 0.10$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση) (Θέτουμε κάτι γενικό ή κάτι που ισχύει από παλιά)

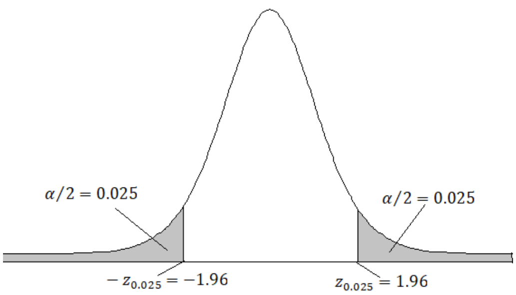
H_1: $p \neq 0.10$ (εναλλακτική υπόθεση) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε *ν=500* το μέγεθος του δείγματος και $\hat{p} = 47/500 = 0.094$ το ποσοστό στο δείγμα. Επειδή έχουμε μεγάλο δείγμα *ν=500 >30* και επιπλέον ισχύουν οι προϋποθέσεις:

$\nu p_0 = 500 \cdot 0.10 = 50 \geq 5$ και $\nu(1-p_0) = 500 \cdot (1-0.10) = 450 \geq 5$, η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{|\hat{p}-p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} > z_{\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας και σε επίπεδο σημαντικότητας *α = 0.05,* οπότε $z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$ έχουμε:



$$\frac{|0.094-0.10|}{\sqrt{0.10(1-0.10)/500}} = \frac{0.006}{0.0134} = 0.45 < z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$$

Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς (με βεβαιότητα 95%) δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το ποσοστό των προβάτων της χώρας που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια διαφοροποιήθηκε.

β) Ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το σημερινό μέσο ποσοστό των προβάτων που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια, δηλαδή ζητείται ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το άγνωστο ποσοστό ενός πληθυσμού. Από τα δειγματοληπτικά δεδομένα έχουμε *ν=500* το μέγεθος του δείγματος και $\hat{p} = 47/500 = 0.094$ το ποσοστό στο δείγμα. Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις: $\nu\hat{p} = 500 \cdot 0.094 = 47 \geq 5$ και $\nu(1-\hat{p}) = 500 \cdot (1-0.094) = 453 \geq 5$, το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι το:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\nu}} = 0.094 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.094(1-0.094)}{500}} = 0.094 \pm 0.026 \text{ ή } (0.068, 0.120) \text{ ή } 6.8\% - 12\%$$

Επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, δηλαδή με βεβαιότητα 95% μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το σημερινό ποσοστό των προβάτων που πάσχουν από τη συγκεκριμένη ασθένεια κυμαίνεται από 6.8% έως 12%.

10. Το Journal of fish biology δημοσίευσε μια μελέτη που έκανε σύγκριση των παράσιτων που βρέθηκαν στα είδη ψαριών στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό. Στη Μεσόγειο από τα 588 ψάρια που πιάστηκαν και εξετάστηκαν, βρέθηκαν μολυσμένα από παράσιτα τα 211. Στον Ατλαντικό ωκεανό, από τα 123 ψάρια που εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα τα 26. **α)** Συγκρίνετε την αναλογία των μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στις δύο θάλασσες (α=0.05). **β)** Δώστε 98% διαστήματα εμπιστοσύνης για τα μέσα ποσοστά των μολυσμένων ψαριών στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό ωκεανό. **γ)** Δώστε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων ποσοστών των μολυσμένων ψαριών στη Μεσόγειο και τον Ατλαντικό ωκεανό.

α) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη σύγκριση των άγνωστων ποσοστών δύο πληθυσμών (ποσοστά μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό). Έστω p_1 το ποσοστό μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στη Μεσόγειο και p_2 το αντίστοιχο ποσοστό Ατλαντικό. Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: p_1 = p_2$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: p_1 \neq p_2$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

Δείγματα από τη Μεσόγειο: $\nu_1 = 588$ το μέγεθος δείγματος και $\hat{p}_1 = 211/588 = 0.359$ το ποσοστό στο δείγμα

Δείγματα από τον Ατλαντικό: $\nu_2 = 123$ το μέγεθος δείγματος και $\hat{p}_2 = 26/123 = 0.211$ το ποσοστό στο δείγμα

Καθώς ισχύουν οι προϋποθέσεις: $\nu_i\hat{p}_i \geq 5$ και $\nu_i(1-\hat{p}_i) \geq 5$, i =1, 2 η απορριπτική περιοχή της H_0 είναι:

Εάν

$$\frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2})}} > z_{\alpha/2} \qquad \text{απορρίπτουμε την } H_0 \quad \text{(στατιστικό κριτήριο)}$$

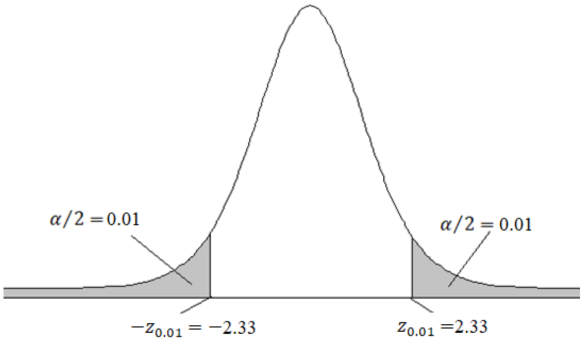
Αντικαθιστώντας και σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, οπότε $z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$ και

$\hat{p} = \frac{211+26}{588+123} = \frac{237}{711} = 0.33$ έχουμε:

$$\frac{|0.359 - 0.211|}{\sqrt{0.33(1-0.33)(\frac{1}{588}+\frac{1}{123})}} = \frac{0.148}{0.0467} = 3.17 > z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$$

Επομένως ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και συνεπώς η H_0 *απορρίπτεται* σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Άρα υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στα ποσοστά των μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στις δύο θάλασσες.

β) Ζητούνται 98% διαστήματα εμπιστοσύνης για τα άγνωστα ποσοστά των μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό. Τα ζητούμενα διαστήματα εμπιστοσύνης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις, καθώς και στις δύο περιπτώσεις ισχύουν οι προϋποθέσεις: $\nu_i \hat{p}_i \geq 5$ και $\nu_i(1-\hat{p}_i) \geq 5$ για i =1, 2. Επιπλέον όταν ζητούνται 98% διαστήματα εμπιστοσύνης το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α=0.02*, επομένως $z_{\alpha/2} = z_{0.02/2} = z_{0.01} = 2.33$



Εκτίμηση του ποσοστού των μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στη Μεσόγειο:

$$\hat{p}_1 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{\nu_1}} = 0.359 \pm 2.33\sqrt{\frac{0.359(1-0.359)}{588}} =$$

$$= 0.359 \pm 0.046 \quad \text{ή} \quad (0.313, 0.405) \ \text{ή} \ 31.3\% - 40.5\%$$

Εκτίμηση του ποσοστού των μολυσμένων ψαριών από παράσιτα στον Ατλαντικό:

$$\hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{\nu_2}} = 0.211 \pm 2.33\sqrt{\frac{0.211(1-0.211)}{123}} =$$

$$= 0.211 \pm 0.037 \quad \text{ή} \quad (0.174, 0.248) \ \text{ή} \ 17.4\% - 24.8\%$$

γ) Ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των ποσοστών των μολυσμένων ψαριών στη Μεσόγειο και τον Ατλαντικό ωκεανό. Το διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από την παρακάτω σχέση, καθώς ισχύει η προϋπόθεση: $\nu_i \hat{p}_i \geq 5$ και $\nu_i(1-\hat{p}_i) \geq 5$ για i =1, 2, όπου $\hat{p}_1 = 0.359$ και $\hat{p}_2 = 0.211$. Επιπλέον όταν ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης, το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α=0.05*, επομένως $z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$.

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{\nu_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{\nu_2}} = 0.359 - 0.211 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.359(1-0.359)}{588} + \frac{0.211(1-0.211)}{123}}$$

$$= 0.148 \pm 0.082 \quad \text{ή} \quad (0.066, 0.230) \quad \text{ή} \quad 6.6\% - 23\%$$

Επομένως με πιθανότητα 0.95, η διαφορά των ποσοστών των μολυσμένων ψαριών στη Μεσόγειο και τον Ατλαντικό ωκεανό κυμαίνεται από 6.6% - 23%.

11. Η αποτελεσματικότητα ενός φυτοφαρμάκου για την αντιμετώπιση κάποιας ασθένειας είναι γνωστό ότι είναι 60%, δηλαδή το 60% των άρρωστων φυτών στα οποία χορηγείται το εν λόγω φάρμακο θεραπεύονται. Για να ελέγξει την αποτελεσματικότητα ενός νέου φυτοφαρμάκου που καταπολεμά την ίδια ασθένεια, ένας γεωπόνος χορήγησε το νέο φάρμακο σε 15 άρρωστα φυτά και από αυτά θεραπεύθηκαν τα 12. **α)** Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% υποστηρίζουν αυτά τα πειραματικά δεδομένα ότι το νέο φάρμακο είναι πιο αποτελεσματικό από αυτό που ήδη χρησιμοποιεί ο αγρότης; **β)** Αν ο γεωπόνος είχε εκτελέσει το πείραμα με 150 άρρωστα φυτά και είχε βρει ότι θεραπεύτηκαν 120 από αυτά, τι έπρεπε να έχουμε συμπεράνει; **γ)** Βρείτε 98% διάστημα εμπιστοσύνης για την αποτελεσματικότητα του νέου φαρμάκου με τα δεδομένα από τα 15 φυτά και ένα αντίστοιχο με τα δεδομένα από τα 150 φυτά. Σχολιάστε τα πλάτη των δύο διαστημάτων.

Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για το άγνωστο ποσοστό ενός πληθυσμού (αποτελεσματικότητα ενός φυτοφαρμάκου ή αλλιώς το ποσοστό των φυτών που πάσχουν από κάποια ασθένεια, στα οποία χορηγείται το εν λόγω φάρμακο και θεραπεύονται).

$H_0\colon p_0 = 0.60$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση) (Θέτουμε κάτι γενικό ή κάτι που ισχύει από παλιά)

$H_1\colon\ p > 0.60$ (εναλλακτική υπόθεση) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε *ν=15* το μέγεθος του δείγματος και $\hat{p} = 12/15 = 0.8$ το ποσοστό στο δείγμα. Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις: $\nu p_0 = 15 \cdot 0.6 = 9 \geq 5$ και $\nu(1 - p_0) = 15(1 - 0.6) = 6 \geq 5$, η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} > z_\alpha$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας και σε επίπεδο σημαντικότητας *α = 0.05,* οπότε $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ έχουμε:

$$\frac{0.8 - 0.6}{\sqrt{0.6(1 - 0.6)/15}} = \frac{0.2}{0.1265} = 1.58 < z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 *δεν μπορεί να απορριφθεί* σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς *δεν μπορούμε να ισχυριστούμε* ότι το νέο φυτοφάρμακο έχει μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα, δηλαδή ότι το νέο φυτοφάρμακο αυξάνει το ποσοστό των φυτών που θεραπεύονται.

β) Στο β) ερώτημα έχουμε να κάνουμε τον ίδιο ακριβώς στατιστικό έλεγχο με τις ίδιες στατιστικές υποθέσεις:

$H_0\colon p_0 = 0.60$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1\colon\ p > 0.60$ (εναλλακτική υπόθεση)

Το μόνο που αλλάζει είναι το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή τώρα *ν=150* με $\hat{p} = 120/150 = 0.8$. Ισχύουν ξανά οι προϋποθέσεις: $\nu p_0 = 150 \cdot 0.6 = 90 \geq 5$ και $\nu(1-p_0) = 150(1-0.6) = 60 \geq 5$, και έχουμε την ίδια απορριπτική περιοχή της H_0:

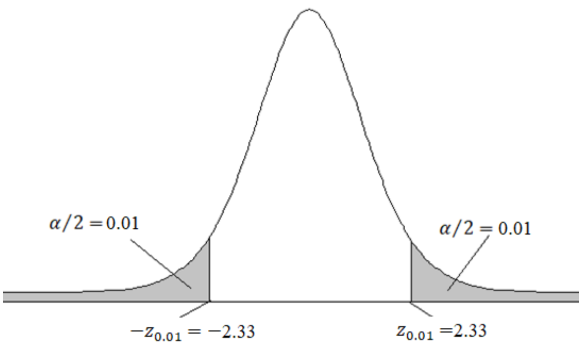
Εάν $\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} > z_\alpha$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας και σε επίπεδο σημαντικότητας *α = 0.05*, οπότε $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$ έχουμε:

$$\frac{0.8-0.6}{\sqrt{0.6(1-0.6)/150}} = \frac{0.2}{0.04} = 5 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Επομένως όταν έχουμε μεγαλύτερο δείγμα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και συνεπώς η H_0 *απορρίπτεται* σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Άρα σε αυτήν την περίπτωση *μπορούμε να ισχυριστούμε* ότι το νέο φυτοφάρμακο έχει μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα, δηλαδή ότι το νέο φυτοφάρμακο αυξάνει το ποσοστό των φυτών που θεραπεύονται.

γ) Ζητούνται 98% διαστήματα εμπιστοσύνης για το άγνωστο ποσοστό ενός πληθυσμού (αποτελεσματικότητα του νέου φαρμάκου ή αλλιώς το ποσοστό των φυτών που θεραπεύονται όταν τους χορηγείται το νέο φάρμακο), όταν έχουμε δεδομένα από 15 φυτά (1ο πείραμα) ή 150 φυτά (2ο πείραμα). Τα ζητούμενα 98% διαστήματα εμπιστοσύνης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις, καθώς και στις δύο περιπτώσεις ισχύουν οι προϋποθέσεις: $\nu\hat{p} \geq 5$ και $\nu(1-\hat{p}) \geq 5$. Επιπλέον όταν ζητούνται 98% διαστήματα εμπιστοσύνης το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α=0.02*, επομένως $z_{\alpha/2} = z_{0.02/2} = z_{0.01} = 2.33$



Όταν έχουμε δεδομένα από 15 φυτά (1ο πείραμα):

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\nu}} = 0.8 \pm 2.33\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{15}} = 0.8 \pm 0.24 \quad \text{ή} \quad (0.56, 1.04) \text{ ή } 56\% - 104\%$$

Όταν έχουμε δεδομένα από 150 φυτά (2ο πείραμα):

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\nu}} = 0.8 \pm 2.33\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{150}} = 0.8 \pm 0.076 \quad \text{ή} \quad (0.724, 0.876) \quad \text{ή} \quad 72.4\% - 87.6\%$$

12. Εταιρεία παραγωγής λιπασμάτων εμπορεύεται αυτή τη στιγμή ένα λίπασμα που έχει μέση απόδοση 75 κιλά/στρέμμα κάποιας καλλιέργειας. Δύο νέα λιπάσματα A και B για την ίδια καλλιέργεια δοκιμάζονται πειραματικά σε 7 αγρούς με τις παρακάτω αποδόσεις:

Λίπασμα A: 78.1 72.4 76.3 77.1 80.0 73.9 81.2

Λίπασμα B: 81.5 83.4 78.7 81.5 81.4 79.8 80.7

Οι 7 αγροί της συγκεκριμένης καλλιέργειας είχαν χωριστεί στη μέση. Στο μισό αγροτεμάχιο χρησιμοποιήθηκε το λίπασμα A και στο άλλο μισό το λίπασμα B.

(α) Με βάση αυτό το πείραμα μπορεί η εταιρεία να συμπεράνει ότι το νέο λίπασμα A αυξάνει τη μέση απόδοση της συγκεκριμένης καλλιέργειας; Κάντε κατάλληλο έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

(β) Δώστε 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση απόδοση της συγκεκριμένης καλλιέργειας, όταν χρησιμοποιείται το λίπασμα A.

(γ) Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% μπορεί η εταιρεία να συμπεράνει ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των μέσων αποδόσεων των δύο λιπασμάτων A και B, όταν χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη καλλιέργεια;

(δ) Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% μπορεί η εταιρεία να συμπεράνει ότι το λίπασμα B αυξάνει περισσότερο από 2 κιλά/στρέμμα τη μέση απόδοση της συγκεκριμένης καλλιέργειας σε σχέση με το λίπασμα A; Κάντε κατάλληλο έλεγχο υποθέσεων.

(ε) Δώστε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων αποδόσεων των δύο λιπασμάτων A και B όταν χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη καλλιέργεια.

(α) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (απόδοση του νέου λιπάσματος A). Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

H_0: $\mu_0 = 75$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση) (Θέτουμε κάτι γενικό ή κάτι που ισχύει από παλιά)

H_1: $\mu_A > 75$ (εναλλακτική υπόθεση)) (Θέτουμε το ερώτημα του ερευνητή)

Καταρχάς από τα πειραματικά δεδομένα υπολογίζουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος:

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_{Ai}}{\nu_A} = \frac{x_{A1} + x_{A2} + \cdots + x_{A7}}{7} = \frac{78.1 + 72.4 + \cdots + 81.2}{7} = 77$$

$$s_A^2 = \frac{1}{\nu_A - 1}\sum_{i=1}^{\nu}(x_{Ai} - \bar{x}_A)^2 = \frac{1}{7-1}[(78.1-77)^2 + (72.4-77)^2 + \cdots + (81.2-77)^2] = 9.85$$

Επομένως $s_A = \sqrt{s_A^2} = \sqrt{9.85}$ =3.14

Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα ν_A=7<30, η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}_A - \mu_0}{s_A/\sqrt{\nu_A}} > t_{\nu_A - 1,\alpha}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας σε επίπεδο σημαντικότητας *α=0.05* έχουμε:

$$\frac{77-75}{3.14/\sqrt{7}} = 1.68 < t_{\nu_A-1,\alpha} = t_{7-1,0.05} = t_{6,0.05} = 1.943$$

Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς από αυτό το μικρό πείραμα των 7 παρατηρήσεων δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση στρεμματική απόδοση του νέου λιπάσματος είναι μεγαλύτερη από 75 κιλά.

(β) Ζητείται 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (απόδοση του νέου λιπάσματος Α). Από τα πειραματικά δεδομένα υπολογίσαμε: $\bar{x}_A = 77$ κιλά/στρέμμα και $s_A = 3.14$ κιλά/στρέμμα.
Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μικρό δείγμα $\nu_A = 7 < 30$, το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}_A \pm \frac{s_A}{\sqrt{\nu_A}} t_{\nu_A-1,\,\alpha/2}$$

Όμως όταν ζητείται 99% διάστημα εμπιστοσύνης, το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α=0.01*, επομένως $\alpha/2 = 0.005$ και $t_{\nu_A-1,\,\alpha/2} = t_{7-1,0.005} = t_{6,0.005} = 3.707$
Επομένως το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$77 \pm \frac{3.14}{\sqrt{7}} \cdot 3.707$ ή 77 ± 4.4 ή $(72.6,\ 81.4)$

Επομένως με πιθανότητα 0.99, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση στρεμματική απόδοση του νέου λιπάσματος Α κυμαίνεται από 72.6 έως 81.4 κιλά.

(γ) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών. Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: \mu_A = \mu_B$ ή $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_A \neq \mu_B$ $\quad H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

Τα δείγματα είναι εξαρτημένα, δηλαδή έχουμε ζευγαρωτές παρατηρήσεις, καθώς το πείραμα λαμβάνει χώρα σε 7 αγρούς της συγκεκριμένης καλλιέργειας, οι οποίοι είχαν χωριστεί στη μέση. Στο μισό αγροτεμάχιο χρησιμοποιήθηκε το λίπασμα Α και στο άλλο μισό το λίπασμα Β. Επομένως το πείραμα γίνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες (τα λιπάσματα δοκιμάζονται σε αγρούς ίδιας γονιμότητας, ίδιας καλλιέργειας, με τις ίδιες καιρικές συνθήκες κ.λ.π.). Σε αυτήν την περίπτωση οι στατιστικές υποθέσεις διατυπώνονται ως εξής:

$H_0: \mu_{A-B} = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_{A-B} \neq 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

και η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν

$\frac{|\bar{d}-\delta|}{s_d/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

όπου $\bar{d}$ και s_d η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των διαφορών $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$, $i = 1,2,\dots,7$

Επομένως για να ελέγξουμε τις στατιστικές υποθέσεις μας θα πρέπει να βρούμε τις διαφορές $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$, $i = 1,2, \dots, 7$ και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση ($\bar{d}$ και s_d) των διαφορών. Επομένως:

Λίπασμα Α (x_{Ai})	78.1	72.4	76.3	77.1	80.0	73.9	81.2
Λίπασμα Β (x_{Bi})	81.5	83.4	78.7	81.5	81.4	79.8	80.7
$d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$	-3.4	-11	-2.4	-4.4	-1.4	-5.9	0.5

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα $\bar{d}$ και s_d από τους γνωστούς τύπους της μέσης τιμής και της διασποράς:

$$\bar{d} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} d_i$$

$$s_d{}^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} d_i^2 - \nu\bar{d}^2\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\bar{d} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} d_i = \frac{(-3.4) + (-11) + \cdots + (0.5)}{7} = -4$$

$$s_d{}^2 = \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} d_i^2 - \nu\bar{d}^2\right) = \frac{[(-3.4)^2 + (-11)^2 + \cdots + (0.5)^2] - 7\cdot(-4)^2}{7-1} = 13.78$$

και η τυπική απόκλιση των διαφορών d_i είναι: $s_d = \sqrt{s_d{}^2} = \sqrt{13.78}$ =3.71

Αντικαθιστούμε στην παρακάτω σχέση του στατιστικού κριτηρίου με δ=0 και έχουμε:

Εάν

$\frac{|\bar{d}-\delta|}{s_d/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

$$\frac{|-4|}{3.71/\sqrt{7}} = 2.85 > t_{\nu-1,\alpha/2} = t_{7-1,0.05/2} = t_{6,0.025} = 2.447$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ανάμεσα στις μέσες στρεμματικές αποδόσεις των δύο λιπασμάτων Α και Β της συγκεκριμένης καλλιέργειας.

(δ) $H_0: \mu_B - \mu_A = 2$ ή ισοδύναμα $H_0: \mu_A - \mu_B = -2$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_B - \mu_A > 2$ $H_1: \mu_A - \mu_B < -2$ (εναλλακτική υπόθεση)

Εάν πάρουμε το 1ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων θα έχουμε την παρακάτω περιοχή απόρριψης της H_0:

Εάν

$$\frac{\bar{d}'-\delta'}{s_{d'}/\sqrt{\nu}} > t_{\nu-1,\alpha}$$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Όπου $\delta' = 2$ και $\bar{d}'$, $s_{d'}$ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των διαφορών $d_i' = x_{Bi} - x_{Ai}$, $i = 1,2,\dots,7$

Ενώ εάν πάρουμε το 2ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων θα έχουμε την παρακάτω περιοχή απόρριψης της H_0:

Εάν

$$\frac{\bar{d}-\delta}{s_d/\sqrt{\nu}} < -t_{\nu-1,\alpha}$$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Όπου $\delta = -2$ και $\bar{d}$, s_d η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των διαφορών $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$, $i = 1,2,\dots,7$

Παίρνοντας το 1ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων αντικαθιστώντας στο κριτήριο, όπου $\overline{d}' = 4$ και $s_{d'} = 3.71$ και $\delta' = 2$ έχουμε:

$$\frac{4-2}{3.71/\sqrt{7}} = 1.43 < t_{\nu-1,\alpha} = t_{7-1,0.05} = t_{6,0.05} = 1.943$$

Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 δεν απορρίπτεται. Επομένως σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, δεν μπορεί η εταιρεία να συμπεράνει ότι το λίπασμα Β αυξάνει περισσότερο από 2 κιλά/στρέμμα τη μέση απόδοση της συγκεκριμένης καλλιέργειας σε σχέση με το λίπασμα Α. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν παίρναμε το 2ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων και την αντίστοιχη περιοχή απόρριψης της H_0.

(ε) Ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων αποδόσεων των δύο λιπασμάτων Α και Β όταν χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη καλλιέργεια. Όπως είπαμε και στο (γ) και (δ) ερώτημα τα δύο δείγματα είναι εξαρτημένα, δηλαδή έχουμε *ζευγαρωτές παρατηρήσεις*. Σε αυτήν την περίπτωση το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων τιμών $\mu_B - \mu_A$ δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{d}' \pm \frac{s_{d'}}{\sqrt{\nu}} t_{\nu-1,\alpha/2}$$

Όπου $\bar{z}'$ και $s_{z'}$ μέσος και η τυπική απόκλιση των διαφορών $d_i' = x_{Bi} - x_{Ai}$, $i = 1,2,\dots,7$, τα οποία έχουν ήδη υπολογιστεί και είναι: $\overline{d}' = 4$ και $s_{d'} = 3.71$. Όμως όταν ζητείται 95% διάστημα εμπιστοσύνης, το στατιστικό σφάλμα θα είναι *α=0.05*, επομένως $\alpha/2$ =*0.025* και $t_{\nu_A-1,\,\alpha/2} = t_{7-1,0.025} = t_{6,0.025} = 2.447$.

Επομένως το ζητούμενο 95% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$4 \pm \frac{3.71}{\sqrt{7}} \cdot 2.447$ ή 4 ± 3.43 ή $(0.57, 7.43)$

Επομένως με πιθανότητα 0.95, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η διαφορά των μέσων αποδόσεων των δύο λιπασμάτων Β και Α, όταν χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη καλλιέργεια κυμαίνεται από 0.57 έως 7.43 κιλά.

13. 48 αγρότες μιας περιοχής καλλιεργούν παραδοσιακά ο καθένας στον αγρό του την ποικιλία Α ενός αρωματικού φυτού. Την τελευταία χρονιά η μέση στρεμματική απόδοση ήταν $\bar{x}_A = 82$ κιλά και η δειγματική τυπική απόκλιση $S_A = 12$ κιλά. Ο γεωπόνος της περιοχής για να τους πείσει να καλλιεργήσουν μια νέα ποικιλία Β, η οποία ενώ πωλείται στην ίδια τιμή έχει μεγαλύτερες αποδόσεις, τους αναφέρει ότι 64 άλλοι αγρότες μιας άλλης περιοχής την τελευταία χρονιά καλλιέργησαν την ποικιλία Β και είχαν μέση στρεμματική απόδοση $\bar{x}_B = 102$ κιλά και δειγματική τυπική απόκλιση $S_B = 16$ κιλά.

α) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5% εάν ισχύει ο ισχυρισμός του γεωπόνου (ότι δηλαδή η ποικιλία Β έχει μεγαλύτερη απόδοση από την ποικιλία Α).

β) Οι αγρότες τελικά συμφωνούν να καλλιεργήσουν την ποικιλία Β, μόνο εάν η Β έχει μέση στρεμματική απόδοση 15 κιλά περισσότερο απ' ότι η ποικιλία Α. Ελέγξτε σε επίπεδο σημαντικότητα 5% εάν θα αλλάξει τελικά ή όχι η καλλιέργεια.

γ) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 1% εάν η μέση απόδοση της ποικιλίας Β είναι μεγαλύτερη από 98 κιλά το στρέμμα.

δ) Να βρεθεί 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση στρεμματική απόδοση της ποικιλίας Β.

(α) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών. Έστω μ_A η μέση στρεμματική απόδοση της ποικιλίας Α και μ_B η μέση στρεμματική απόδοση της ποικιλίας Β. Διατυπώνουμε τις στατιστικές υποθέσεις:

$H_0: \mu_A = \mu_B$ ή $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_A < \mu_B$ $H_1: \mu_A - \mu_B < 0$ (εναλλακτική υπόθεση)

Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

Δείγματα από την ποικιλία Α: $\nu_A = 48$, $\bar{x}_A = 82\ kgr/\sigma\tau\rho\epsilon\mu.$, $s_A = 12\ kgr/\sigma\tau\rho\epsilon\mu.$

Δείγματα από την ποικιλία Β: $\nu_B = 64$, $\bar{x}_B = 102\ kgr/\sigma\tau\rho\epsilon\mu.$, $s_B = 16\ kgr/\sigma\tau\rho\epsilon\mu.$

Επειδή οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι άγνωστες και επιπλέον έχουμε μεγάλα δείγματα ν_1=48 >30 και ν_2=64 >30, η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν

$$\frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B - \delta}{\sqrt{\frac{s_A^2}{\nu_A} + \frac{s_B^2}{\nu_B}}} < -z_\alpha \quad \text{απορρίπτουμε την } H_0 \quad \text{(στατιστικό κριτήριο)}$$

Αντικαθιστώντας με δ=0 και σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{82-102}{\sqrt{\frac{12^2}{48} + \frac{16^2}{64}}} = \frac{-20}{\sqrt{7}} = -7.56 < -z_\alpha = -z_{0.05} = -1.645$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς η ποικιλία Β έχει μεγαλύτερη απόδοση από την ποικιλία Α.

(β) $H_0: \mu_B - \mu_A = 15$ ή ισοδύναμα $H_0: \mu_A - \mu_B = -15$ (αρχική ή μηδενική υπόθεση)

$H_1: \mu_B - \mu_A > 15$ $H_1: \mu_A - \mu_B < -15$ (εναλλακτική υπόθεση)

Εάν πάρουμε το 1ο ζεύγος στατιστικών υποθέσεων θα έχουμε την παρακάτω περιοχή απόρριψης της H_0 (οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι άγνωστες και επιπλέον έχουμε μεγάλα δείγματα ν_1=48 >30 και ν_2=64 >30):

Εάν

$$\frac{\bar{x}_B - \bar{x}_A - \delta}{\sqrt{\frac{s_B^2}{\nu_B} + \frac{s_A^2}{\nu_A}}} > z_\alpha \quad \text{απορρίπτουμε την } H_0 \quad \text{(στατιστικό κριτήριο)}$$

Αντικαθιστώντας και σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 έχουμε:

$$\frac{102-82-15}{\sqrt{\frac{16^2}{64} + \frac{12^2}{48}}} = \frac{5}{\sqrt{7}} = 1.89 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

Άρα ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Συνεπώς η ποικιλία Β έχει μεγαλύτερη στρεμματική απόδοση από την ποικιλία Α περισσότερο από 15 κιλά.

γ) Πρόκειται για στατιστικό έλεγχο υποθέσεων για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (ποικιλία Β).

$H_0: \mu_0 = 98$ (αρχική υπόθεση)

$H_1: \mu > 98$ (εναλλακτική υπόθεση)

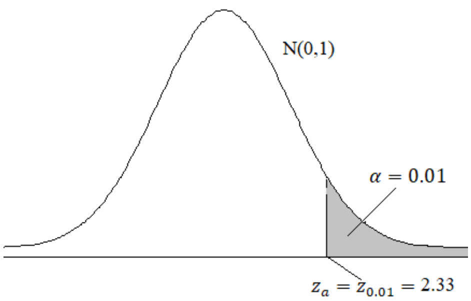
Από τα πειραματικά δεδομένα έχουμε:

Δείγματα από την ποικιλία Β: $\nu_B = 64$, $\bar{x}_B = 102\ kgr/\sigma\tau\rho\varepsilon\mu.$, $s_B = 16\ kgr/\sigma\tau\rho\varepsilon\mu.$

Επειδή η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, αλλά έχουμε μεγάλο δείγμα ν_B *=64 >30,* η απορριπτική περιοχή της H_0 δίνεται από τη σχέση:

Εάν $\frac{\bar{x}_B - \mu_0}{s_B/\sqrt{\nu_B}} > z_a$ απορρίπτουμε την H_0 (στατιστικό κριτήριο)

Αντικαθιστώντας έχουμε: $\frac{102-98}{16/\sqrt{64}} = \frac{4\sqrt{64}}{16} = 2 < z_a = z_{0.01} = 2.33$



Άρα δεν ισχύει η ανισότητα του στατιστικού κριτηρίου και επομένως η H_0 δεν μπορεί να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 1%. Συνεπώς (με βεβαιότητα 99%) δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η μέση στρεμματική απόδοση της ποικιλίας Β είναι μεγαλύτερη από 98 κιλά.

δ) Ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού (απόδοση ποικιλίας Β). Καθώς η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη και επιπλέον έχουμε μεγάλο δείγμα $\nu_B = 64 > 30$, το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα δίνεται από τη σχέση:

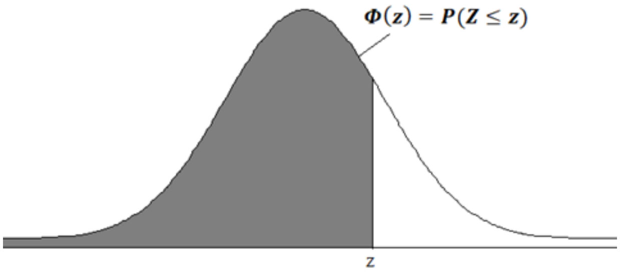
$$\bar{x}_B \pm \frac{s_B}{\sqrt{\nu_B}}\, z_{\alpha/2}$$

Όμως όταν ζητείται 98% διάστημα εμπιστοσύνης το στατιστικό σφάλμα θα είναι α = 0.02, επομένως $\alpha/2 = 0.01$ και $z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2.33$

Επομένως το ζητούμενο 98% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι:

$102 \pm \frac{16}{\sqrt{64}} \cdot 2.33$ ή 102 ± 4.66 ή (97.34, 106.66)

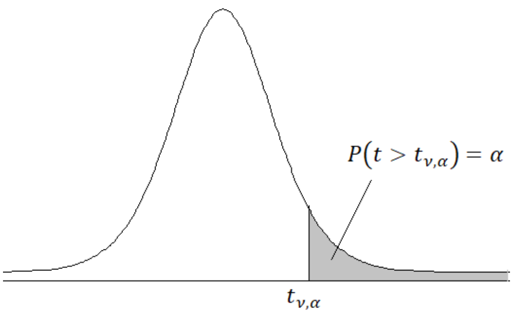
Πίνακας της Τυπικής Κανονικής κατανομής



Παράδειγμα: Φ(0.82)=0.7939, Φ(1.28)=0.8997

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Πίνακας της $t_{v,\alpha}$ κατανομής (Student)



	α				
β.ε.	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581