

Ασκήσεις σε Τυχαίες μεταβλητές και Κατανομές

1. Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πιθανότητας:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Να βρεθούν η σταθερά c , η πιθανότητα $P(0 \leq X \leq 4)$, η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \geq 3/1 < X < 4)$, η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ της X .

2. Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πιθανότητας:

x	10	20	30	40	50
$p(x)$	$c/8$	$c/2$	$3c/4$	$c/2$	$c/8$

Αφού υπολογιστεί η σταθερά c , να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X = 40)$, $P(X \geq 30/X < 40)$, καθώς επίσης και η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ της X .

3. Ο αριθμός των προσκλήσεων ενός κτηνιάτρου από μια κτηνοτροφική μονάδα ανά μήνα είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.1	0.4	0.2	c	0.1	0.05

α) Βρείτε την πιθανότητα ο κτηνίατρος σε ένα μήνα να προσκληθεί από την κτηνοτροφική μονάδα 3 φορές ακριβώς.

β) Βρείτε την πιθανότητα ο κτηνίατρος σε ένα μήνα να προσκληθεί από την κτηνοτροφική μονάδα το πολύ 3 φορές, όταν είναι γνωστό ότι προσκλήθηκε τουλάχιστον μία φορά.

γ) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .

4. Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητα

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -c \leq x \leq c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθούν η σταθερά c , οι πιθανότητες $P(0 \leq X < 1)$, $P(X \geq 0.1/-0.1 < X < 0.2)$, καθώς και η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$ της X .

5. Σε έναν πληθυσμό (ας πούμε γυναίκες ηλικίας 30 - 40 ετών στην Ελλάδα), η μέση συστολική πίεση είναι 120 mmHg, με τυπική απόκλιση 20 mmHg και ο πληθυσμός (των πιέσεων) ακολουθεί κανονική κατανομή. **(α)** Τι ποσοστό του πληθυσμού έχει πίεση: **(i)** Μικρότερη από 150 mmHg, **(ii)** Μεγαλύτερη από 135 mmHg, **(iii)** Μεταξύ 110 και 125 mmHg, **(β)** Ποια είναι εκείνη η πίεση πάνω από την οποία βρίσκεται μόνο το 1% του πληθυσμού; **(γ)** Η συστολική πίεση ενός ατόμου κρίνεται ως φυσιολογική εάν βρίσκεται στο διάστημα εκείνο γύρω από τον μέσο όρο (συμμετρικό διάστημα γύρω από τον μέσο) που περιέχει το 95% των πιέσεων του πληθυσμού. Να βρεθεί εκείνη η τιμή πίεσης, πάνω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υπερτασικό. Να βρεθεί επίσης εκείνη η τιμή της πίεσης, πάνω από την οποία ένα άτομο κρίνεται ως υποτασικό.
6. Μία γέφυρα χωράει το πολύ 100 αυτοκίνητα και το μέγιστο βάρος που σηκώνει είναι 365 τόνοι. Αν υποθέσουμε ότι τα βάρη των αυτοκινήτων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο βάρος 3.5 τόνους και τυπική απόκλιση 0.5 τόνο, **(α)** ποια η πιθανότητα, εάν κάποια στιγμή βρεθούν στη γέφυρα 100 αυτοκίνητα, να έχουμε υπέρβαση του ανώτατου επιτρεπτού βάρους; **(β)** Ποιο είναι εκείνο το βάρος που

θα έπρεπε να σηκώνει η γέφυρα, αν απαιτούσαμε η πιθανότητα να έχουμε υπέρβαση αυτού του βάρους από 100 αυτοκίνητα να είναι 0.1%;

7. Ένα ηλεκτρονικό σύστημα αποτελείται από δέκα εξαρτήματα. Κάθε ένα από τα εξαρτήματα έχει πιθανότητα 0.2 να υποστεί βλάβη και το να πάθει βλάβη κάποιο εξάρτημα είναι ανεξάρτητο από το αν άλλα εξαρτήματα έχουν υποστεί βλάβη ή όχι. **(α)** Αν το σύστημα λειτουργεί, εφόσον τουλάχιστον οκτώ από τα δέκα εξαρτήματά του λειτουργούν, ποια η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργεί; **(β)** Επίσης βρείτε την πιθανότητα να υποστούν βλάβη τουλάχιστον δύο εξαρτήματα δεδομένου ότι έχει υποστεί βλάβη τουλάχιστον ένα.
8. Ένα καινούριο εμβόλιο έχει πιθανότητα 80% ανοσοποίησης των κουνελιών από μία ασθένεια. Ένας μεγάλος αριθμός κουνελιών εμβολιάζεται και στη συνέχεια ορισμένα κουνέλια επιλέγονται τυχαία για εργαστηριακή παρακολούθηση. **(α)** Ποια η πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 9 ανοσοποιημένα κουνέλια, όταν επιλέξουμε 10 κουνέλια. **(β)** Εάν επιλέξουμε 100 κουνέλια, ποια η πιθανότητα ο αριθμός των ανοσοποιημένων κουνελιών να κυμαίνεται μεταξύ του 72 και του 88.
9. Μια μηχανή συσκευασίας τόνου σε κονσέρβες έχει ρυθμισθεί έτσι ώστε το βάρος του περιεχομένου ανά κονσέρβα, έστω X , να ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 250gr και τυπική απόκλιση 10gr.
(α) Επιλέγουμε τυχαία μια κονσέρβα από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια είναι η πιθανότητα το βάρος του περιεχομένου της κονσέρβας i) να βρίσκεται μεταξύ 245gr και 255gr ii) να είναι μεγαλύτερο από 265gr.
(β) Επιλέγουμε τυχαία 9 κονσέρβες από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια είναι η πιθανότητα i) το πολύ 2 από τις 9 κονσέρβες να περιέχουν ποσότητα μεγαλύτερη από 265gr ii) το μέσο βάρος του περιεχομένου των 9 κονσερβών να είναι μεγαλύτερο από 265gr. iii) το συνολικό βάρος του περιεχομένου των 9 κονσερβών να είναι μεγαλύτερο από 2265gr.
 γ) Να προσδιορίσετε την τιμή x_0 της X για την οποία ισχύει ότι: το 90% των κονσερβών που παράγονται από τη συγκεκριμένη μηχανή έχουν βάρος (περιεχομένου) μικρότερο από αυτήν την τιμή (x_0).
10. Ο αριθμός των επισκεπτών σε μια ιστοσελίδα στο διαδίκτυο είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή 5 άτομα ανά ώρα. Βρείτε την πιθανότητα να επισκεφθούν την ιστοσελίδα: **(α)** ακριβώς δύο άτομα στη διάρκεια μιας ώρας, **(β)** τουλάχιστον δύο άτομα κατά τη διάρκεια δύο ωρών, **(γ)** από τουλάχιστον ένα άτομο κάθε ώρα σε δύο ώρες, **(δ)** μεταξύ 100 και 150 άτομα στη διάρκεια ενός 24ώρου. Επίσης βρείτε την πιθανότητα, **(ε)** τουλάχιστον δύο επισκέψεων στη διάρκεια μιας ώρας, δεδομένου ότι είχαμε τουλάχιστον μία επίσκεψη.
11. Ένας εντομολόγος μελετά τον αριθμό των ζυγίων στα φύλλα ενός συγκεκριμένου τύπου δένδρου. Ο αριθμός αυτός ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 4 ζύφια ανά φύλλο. **(α)** Ποια η πιθανότητα να πάρει τυχαία ένα φύλλο με τουλάχιστον 2 ζύφια; **(β)** Ποια η πιθανότητα να πάρει τυχαία 2 φύλλα που να έχουν συνολικά το πολύ δύο ζύφια; **(γ)** Ο εντομολόγος επιλέγει 3 φύλλα. Ποια η πιθανότητα τα 2 μόνο από αυτά να έχουν από τουλάχιστον 2 ζύφια το καθένα. **(δ)** Ποια η πιθανότητα στα 36 φύλλα να υπάρχουν συνολικά τουλάχιστον 150 ζύφια; **(ε)** Ποια η πιθανότητα στα 36 φύλλα να υπάρχουν συνολικά το πολύ 168 ζύφια, όταν είναι γνωστό ότι υπάρχουν τουλάχιστον 150 ζύφια.
12. Ο αριθμός των σωματιδίων που εκπέμπει μια πηγή ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή ένα σωματίδιο ανά δευτερόλεπτο. Ζητούνται οι πιθανότητες: **(α)** Σε διάστημα 3 δευτερολέπτων να έχουμε το πολύ 2 σωματίδια, **(β)** σε διάστημα 4 δευτερολέπτων να έχουμε τουλάχιστον 3 σωματίδια. **(γ)** σε διάστημα 15 λεπτών να έχουμε τουλάχιστον 930 σωματίδια. **(δ)** Επιλέγουμε τυχαία 4 διαστήματα των 3 δευτερολέπτων. Ποια η πιθανότητα σε ακριβώς 3 από τα 4 διαστήματα να έχουμε το πολύ 2 σωματίδια.
13. Οι ακαθάριστες εβδομαδιαίες εισπράξεις μιας κτηνοτροφικής μονάδας, από την πώληση του γάλακτος που παράγει, είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 2200 και τυπική απόκλιση 230 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα οι ακαθάριστες εισπράξεις της μονάδας από το γάλα που παράγει **(α)** σε μια εβδομάδα να ξεπερνούν τα 2000 ευρώ, **(β)** να ξεπερνούν τα 2000 ευρώ σε 2 από τις 3 επόμενες εβδομάδες και **(γ)** σε ένα μήνα (4 εβδομάδες) να ξεπερνούν συνολικά τα 10000 ευρώ (μπορείτε να υποθέσετε ότι οι εβδομαδιαίες εισπράξεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες).

14. Μια μηχανή κατασκευάζει λαμπτήρες που συσκευάζονται σε κουτιά των 100. Ο αριθμός των ελαττωματικών λαμπτήρων σε ένα τυχαίο κουτί είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο $\lambda=1.1$ και ένα κουτί απορρίπτεται ως ελαττωματικό αν περιέχει τουλάχιστον τρεις ελαττωματικούς λαμπτήρες. **(α)** Να βρεθεί η πιθανότητα ένα τυχαίο κουτί να απορριφθεί ως ελαττωματικό. **(β)** Επιλέγουμε τυχαία 5 κουτιά από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από αυτά να απορριφθεί ως ελαττωματικό. **(γ)** Επιλέγουμε τυχαία 100 κουτιά από την παραγωγή της συγκεκριμένης μηχανής. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον 13, αλλά όχι περισσότερα από 19 να απορριφθούν ως ελαττωματικά.
15. Η ποσότητα νικοτίνης που περιέχεται σε ένα τσιγάρο συγκεκριμένης μάρκας είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = 0.8mg$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.1mg$. Αν ένα άτομο καπνίζει 100 τσιγάρα την εβδομάδα ποια η πιθανότητα: **(α)** Η **συνολική** ποσότητα νικοτίνης στην οποία θα εκτεθεί να είναι τουλάχιστον $82mg$. **(β)** Η **μέση** ποσότητα νικοτίνης (των 100 τσιγάρων) να είναι μεταξύ των 0.78 και $0.83mg$.
16. Η ποσότητα φυτικών ιών που περιέχεται ανά μερίδα (των $100gr$) τραγανών δημητριακών είναι τυχαία μεταβλητή, έστω X , η οποία σύμφωνα με την εταιρεία παραγωγής έχει μέση τιμή $5gr$ και τυπική απόκλιση $0.81gr$. Σε ένα διαιτολόγιο δύο εβδομάδων σκέφτεστε να εντάξετε 40 μερίδες από τα συγκεκριμένα δημητριακά. Ποια είναι η πιθανότητα **(α)** η **μέση** ποσότητα φυτικών ιών σε 40 τέτοιες μερίδες να είναι τουλάχιστον $4.5gr$, **(β)** η **συνολική** ποσότητα φυτικών ιών σε 40 τέτοιες μερίδες να είναι τουλάχιστον $220gr$.