ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ράντες (συνέχεια)

- Μέλλουσα ονομάζεται η ράντα που πρόκειται να αρχίσει στο μέλλον αλλά υπολογίζουμε την αξία της πριν αρχίσει. Οι χρονικές περίοδοι μέχρι να ξεκινήσει η ράντα συμβολίζονται με λ|.
- Αρξάμενη ονομάζεται η ράντα που έχει ήδη ξεκινήσει και ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την αξία της σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή μετά την έναρξή της. Οι χρονικές περίοδοι που έχουν περάσει από την έναρξη της ράντας συμβολίζονται με |λ.
- Συμβολίζουμε επίσης με $V_{\alpha\rho\chi}$ την αρχική αξία της ράντας, με $V_{\tau\varepsilon\lambda}$ την τελική αξία της ράντας και με V την αξία της ράντας μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Παράδειγμα

Για την εξόφληση ενός δανείου που υπογράφεται σήμερα συμφωνείται να πληρωθούν 10 ετήσιες δόσεις των €5.000 στο τέλος κάθε έτους με ετήσιο επιτόκιο 10% και ετήσιο ανατοκισμό. Επίσης συμφωνείται η πρώτη δόση να πληρωθεί 4 έτη από σήμερα. Να βρεθεί το ποσό του δανείου.

Λύση

Υπολογίζουμε αρχικά την αρχική αξία της ράντας σε 3 έτη από σήμερα, η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη αφού κάθε δόση πληρώνεται στο τέλος του έτους.

$$V_{\alpha\rho\chi} = A_{n|i} = Ra_{n|i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 5000\frac{1-(1+0.1)^{-10}}{0.1}$$
$$= 5000 \times 6.1446 = 30723$$

Η αξία της ράντας σε 3 έτη από σήμερα είναι 30723 επομένως η σημερινή της αξία θα είναι

$$V = (1+i)^{-3} V_{\alpha\rho\chi} = 1.1^{-3} 30723 = 23083$$

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που ζητάμε την παρούσα αξία **αρξάμενης** ράντας έχουμε:

- Για τη ληξιπρόθεσμη μοναδιαία ράντα

$$(1+i)^{\lambda} a_{n|i} = (1+i)^{\lambda} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- Για την προκαταβλητέα μοναδιαία ράντα

$$(1+i)^{\lambda}(1+i) a_{n|i} = (1+i)^{\lambda+1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Μέση Λήξη

Το ερώτημα που μας ενδιαφέρει είναι **σε ποια χρονική στιγμή η αξία της ράντας εξισώνεται με το άθροισμα των όρων της**.

Γενικά ισχύει (για ληξιπρόθεσμη αλλά και προκαταβλητέα ράντα σταθερού όρου) $A_{n|i} < S_{n|i}$ δηλαδή η τελική αξία είναι μεγαλύτερη της αρχικής αξίας. Όμοια για τη μοναδιαία ράντα έχουμε $a_{n|i} < s_{n|i}$. Ζητούμε λοιπόν το λ για το οποίο ισχύει $A_{n|i}(1+i)^{\lambda} = \lambda R.$

Οπότε έχουμε

$$A_{n|i}(1+i)^{n} = S_{n|i} \Leftrightarrow A_{n|i}(1+i)^{\lambda}(1+i)^{n-\lambda} = S_{n|i} \Leftrightarrow$$

$$A_{n|i}(1+i)^{\lambda} = S_{n|i}(1+i)^{\lambda-n} = \lambda R$$

Η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία της ράντας εξισώνεται με το άθροισμα των όρων της ράντας (**μέση λήξη των όρων της ράντας**) είναι ανεξάρτητη του όρου της και βρίσκεται ως εξής:

$$A_{n|i}(1+i)^{\lambda} = \lambda R \Longrightarrow R a_{n|i}(1+i)^{\lambda} = nR \Longrightarrow$$
$$a_{n|i}(1+i)^{\lambda} = n \Longrightarrow (1+i)^{\lambda} = n/a_{n|i} \Longrightarrow$$
$$\lambda \ln(1+i) = \ln(\frac{n}{a_{n|i}}) \Longrightarrow$$
$$\lambda = \ln\left(\frac{n}{a_{n|i}}\right)/\ln(1+i)$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η μέση λήξη των όρων ράντας 10 όρων με ετήσιο επιτόκιο 5% και ετήσιο ανατοκισμό.

Λύση

$$a_{10|0.05} = \frac{1-(1+0.05)^{-10}}{0.05} = 7.7217$$

$$a_{n|i}(1+i)^{\lambda} = n \Leftrightarrow a_{10|0.05}(1+0.05)^{\lambda} = 10 \Leftrightarrow$$

$$1.05^{\lambda} = \frac{10}{7.7217} \Leftrightarrow \lambda \ln(1.05) = \ln(1.295) \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\ln(1.295)}{\ln(1.05)} \Leftrightarrow \lambda = 5.299$$

Διηνεκής Ράντα

Διηνεκής ράντα ονομάζεται η ράντα που αποτελείται από άπειρους όρους.

- Αρχική αξία διηνεκούς **μοναδιαίας** ληξιπρόθεσμης ράντας $a_{\infty|i} = 1/i$
- Τελική αξία διηνεκούς ράντας είναι ∞
- Αρχική αξία ληξιπρόθεσμης διηνεκούς ράντας $V = Ra_{\infty|i} = R/i$
- Αρχική αξία προκαταβλητέας διηνεκούς ράντας $V = Ra_{\infty|i} = R + R/i$

Κλασματική Ράντα

Αν σε μια ράντα καταβάλλονται ρ δόσεις σε μία περίοδο ανατοκισμού, τότε έχουμε κλασματική ράντα με συχνότητα ρ, πχ αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος και οι δόσεις καταβάλλονται κάθε μήνα τότε έχουμε κλασματική ράντα με συχνότητα ρ=6. Τα στοιχεία κλασματικής ράντας είναι:

- Δόση κλασματικής περιόδου R/ρ
- Πλήθος περιόδων nρ
- Επιτόκιο κλασματικής περιόδου i_ρ (ισοδύναμο)
- Ανάλογο επιτόκιο $J_\rho = i_\rho \rho$

- Συντελεστής αρχικής αξίας κλασματικής ράντας

1. ληξιπρόθεσμη $a_{n|i}{}^{(\rho)} = a_{n|i}\frac{i}{J_\rho}$ ($\frac{i}{J_\rho}$: διορθωτικός παράγοντας)
2. προκαταβλητέα $a_{n|i}{}^{(\rho)} = a_{n|i}\frac{i}{J_\rho}(1+\frac{J_\rho}{\rho})$

- Αξία κλασματικής ράντας $V = Ra_{n|i}{}^{(\rho)}$
- Συντελεστής τελικής αξίας κλασματικής ράντας

1. ληξιπρόθεσμη $s_{n|i}{}^{(\rho)} = s_{n|i}\frac{i}{J_\rho}$ ($\frac{i}{J_\rho}$: διορθωτικός παράγοντας)
2. προκαταβλητέα $s_{n|i}{}^{(\rho)} = s_{n|i}\frac{i}{J_\rho}(1+i)^{1/\rho}$

- Αξία κλασματικής ράντας $V = Rs_{n|i}{}^{(\rho)}$

Εφαρμογές

1. Ποιο είναι το ποσό που θα κατατεθεί στην αρχή του έτους για να χορηγείται για άπειρο χρόνο υποτροφία €12.000 στο τέλος κάθε έτους; Επιτόκιο ετήσιο 4%.

Λύση

Για την αρχική αξία διηνεκούς ράντας έχουμε

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i} = \frac{1}{0.04} = 25$$

Επομένως η ζητούμενη αρχική αξία θα είναι

$$A_{\infty|i} = Ra_{\infty|i} = 12000 \times 25 = 300000$$

Άρα το ποσό που πρέπει να κατατεθεί είναι 300000

2. Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα για 20 έτη το ποσό των €1.000 στο τέλος κάθε εξαμήνου. Το επιτόκιο θεωρείται εξαμηνιαίο ίσο με 3% και ο ανατοκισμός επίσης εξαμηνιαίος. Το ποσό που σχηματίζεται στο τέλος των 20 ετών το αφήνει στην τράπεζα για ακόμα 5 έτη με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 5%. Να βρεθεί το τελικό ποσό που σχηματίστηκε.

Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα 40 όρων με όρο 1000 EUR και ζητάμε την τελική της αξία.

Άρα $S_{n|i} = Rs_{n|i} = 1000\, s_{40|0.03} = 1000\,\frac{1.03^{40}-1}{0.03} = 75401.26$

Το ποσό αυτό παραμένει στην τράπεζα και τοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 5% άρα έχουμε

$$\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_0(1+0.05)^5 = 75401.26 \times 1.05^5 = 96233$$

Άρα το συνολικό ποσό μετά από 25 έτη θα είναι 96233

3. Ποια είναι η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με όρο 400 ευρώ το εξάμηνο, η οποία ξεκίνησε πριν 2 χρόνια και θα συνεχίσει για άλλα 3 χρόνια. Υποθέστε ότι ο ανατοκισμός είναι ανά εξάμηνο, με ετήσιο επιτόκιο 4%.

Λύση

Επειδή οι δόσεις της ράντας είναι εξαμηνιαίες, θα πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε εξάμηνα και το επιτόκιο σε εξαμηνιαίο.

Η συνολική διάρκεια της ράντας είναι n=2+3=5 έτη δηλαδή 10 εξάμηνα

i=4% ετήσιο δηλαδή 2% εξαμηνιαίο

Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας αρξάμενης ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, ανατοκιζόμενη για 2 έτη (4 εξάμηνα) από την αρχή της.

Άρα η παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα είναι:

$$V = V_{\alpha\rho\chi}(1+i)^4 = Ra_{n|i}(1+0{,}02)^4 = Ra_{10|0.02}(1+0{,}02)^4$$
$$= 400\,\frac{1-(1+i)^{-10}}{i}\,1{,}02^4 = 400 \times 8.982585 \times 1.0824 =$$
$$= 3889.1065$$

4. Να βρεθεί η παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας με ετήσιο όρο 5000 ευρώ διάρκειας 15 χρόνων, με ετήσιο επιτόκιο 3%, της οποίας η πρώτη καταβολή άρχισε πριν 2 χρόνια.

Λύση

n=15, i=0.03

Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας αρξάμενης ράντας, η οποία θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, ανατοκιζόμενη για 2 έτη από την αρχή της. Η παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα είναι:

$$V = V_{\alpha\rho\chi}(1+i)^2 = Ra_{n|i}(1+i)(1+i)^2 =$$
$$= Ra_{15|0.03}(1+0.03)(1+0.03)^2 =$$
$$= 5000 \times \frac{1-(1+0.03)^{-15}}{0.03} \times 1.03^3 =$$
$$= 65222.72$$

5. Η Εταιρεία Ε πρέπει να καταθέσει σήμερα ένα μεγάλο ποσό, ώστε να μπορεί στο τέλος κάθε έτους και για 10 έτη να δίνει δώρα στα παιδιά των εργαζομένων της αξίας 2.000 ευρώ. Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει, αν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος και το επιτόκιο 3%;

Λύση

n= 10 έτη, i= 3%, R=2.000

Θέλουμε να βρούμε την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας. Άρα έχουμε

$$V_{\alpha\rho\chi} = Ra_{n|i} = 2000a_{10|0.03} = 2000\frac{1-(1+0.03)^{-10}}{0.03} =$$

$$= 2000 \times 8.5302 = 17060.4$$

6. Η Εταιρεία Ε πρέπει να καταθέσει σήμερα ένα μεγάλο ποσό, ώστε να μπορεί στο τέλος κάθε έτους, και για πάντα, να δίνει δώρα στα παιδιά των εργαζομένων της, αξίας 3.000 ευρώ. Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει, αν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος και το επιτόκιο 3%;

Λύση

Εδώ έχουμε ληξιπρόθεσμη και διηνεκή ράντα (καθώς δεν προσδιορίζεται τέλος). Η αρχική της αξία δίνεται ως εξής:

$V_{\alpha\rho\chi} = R/i$ με R=3000 και i=0.03

Άρα η αρχική αξία της διηνεκούς ράντας είναι

$$V_{\alpha\rho\chi} = \frac{R}{i} = \frac{3000}{0.03} = 100000$$

7. Υποθέτουμε ότι κάποιος άρχισε να καταθέτει πριν 6 χρόνια, κάθε χρόνο 2.500 ευρώ και σκοπεύει να συνεχίσει για άλλα 3 χρόνια. Να βρεθεί η παρούσα αξία όλων των καταθέσεων, όταν το επιτόκιο είναι 3,5%. Θεωρούμε προκαταβλητέα ράντα.

Λύση

n=6+3=9 έτη, i=0.035

Θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας προκαταβλητέας αρξάμενης ράντας. Αυτή θα ισούται με την αρχική αξία της ράντας, ανατοκιζόμενη για 6 έτη από την αρχή της. Η παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα είναι:

$$V = V_{\alpha\rho\chi}(1+i)^6 = Ra_{n|i}(1+i)(1+i)^6 =$$

$$= 2500 \times a_{9|0.035} \times (1 + 0.035)^7 =$$
$$= 2500 \times \frac{1 - (1 + 0.035)^{-9}}{0.035} \times 1.035^7 =$$
$$= 24197.75$$

8. Κάποιος δανείστηκε σήμερα με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%, και συμφώνησε να ξοφλήσει, πληρώνοντας κάθε έτος 10.000 ευρώ για 7 έτη, με την πρώτη πληρωμή να γίνει με την είσπραξη του δανείου. Τι ποσό δανείστηκε;

Λύση

Η αποπληρωμή του δανείου θα γίνει με ισόποσες δόσεις σε μορφή προκαταβλητέας ράντας. Ζητάμε το ποσό του δανείου που αντιστοιχεί στην αρχική αξία της ράντας.

n= 7 έτη και ετήσιο επιτόκιο i= 0.08

Θέλουμε να βρούμε την αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας, αυτή θα είναι

$$V = V_{\alpha\rho\chi}(1+i) = Ra_{n|i}(1+i) =$$
$$= 10000 \times a_{7|0.08} \times (1+0.08) = 10000 \times 5.6229 \times 1.08$$
$$= 56229.12$$

Βιβλιογραφία

- Οικονομικά Μαθηματικά, Μονοβασίλης Θ., Καλογηράτου Ζ., ΣΕΑΒ
- Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης, Μασούρος Χ., Τσίτουρας Χ., Εκδόσεις Τσότρας

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας