ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ράντες

Ράντα ή **Χρηματική Ροή** ή **Χρηματοσειρά** ονομάζεται μια σειρά χρηματικών ποσών που καταβάλλονται σε ίσα και τακτά χρονικά διαστήματα. Τα χρηματικά ποσά που καταβάλλονται καλούνται **όροι** της ράντας και συμβολίζονται με R.

Λήξη του όρου ονομάζεται η ημέρα καταβάλλεται ο όρος.

- Σταθερή ράντα ονομάζεται η ράντα που περιλαμβάνει ίσους όρους ενώ όταν όλοι οι όροι είναι ίσοι με τη μονάδα τότε η ράντα ονομάζεται μοναδιαία.

Περίοδος της ράντας είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην καταβολή δύο διαδοχικών όρων.

Αρχή της ράντας είναι η αρχή της πρώτης περιόδου και τέλος της το τέλος της τελευταίας περιόδου.

Οι ράντες διακρίνονται σε **ληξιπρόθεσμες** και **προκαταβλητέες**.

- Ληξιπρόθεσμη είναι η ράντα που ο όρος της καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου
- Προκαταβλητέα είναι η ράντα που ο όρος της καταβάλλεται στην αρχή της κάθε περιόδου

Ακέραιη είναι η ράντα όταν η περίοδος της και η περίοδος στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο συμπίπτουν (συνήθως θεωρούμε ότι έχουμε ακέραιη ράντα).

- **Πρόσκαιρη** ονομάζεται η ράντα με καθορισμένο πλήθος όρων.
- **Διηνεκής** ονομάζεται η ράντα με άπειρο πλήθος όρων.

Τελική αξία της ράντας ονομάζεται η αξία που έχει η ράντα στο τέλος της ενώ **αρχική αξία είναι** η αξία που έχει στην αρχή.

Παραδείγματα

- Γονείς καταθέτουν σε εξαμηνιαία ή μηνιαία βάση σταθερό ποσό ώστε το παιδί τους με την ενηλικίωσή του να λάβει συγκεκριμένο ποσό για να καλύψει το κόστος των σπουδών του.
- Εργαζόμενος καταθέτει κάθε μήνα συγκεκριμένο ποσό έτσι ώστε κατά τη συνταξιοδότησή του να λάβει συμπληρωματική σύναξη.

Εφαρμογή

Ένας πατέρας καταθέτει την ημέρα γέννησης του παιδιού του €1.000 και στη συνέχεια καταθέτει κάθε χρόνο €1.000 έως ότου το παιδί να συμπληρώνει το 17ο έτος της ηλικίας του δηλαδή 18 φορές. Ποιο είναι το ποσό που θα συσσωρευτεί όταν συμπληρώσει το 18ο έτος της ηλικίας του;

Λύση

Υποθέτουμε ετήσιο και σταθερό επιτόκιο 5% και ο ανατοκισμός είναι επίσης ετήσιος. Θα έχουμε συνολικά 18 καταθέσεις.

Το ποσό της 1ης κατάθεσης (γέννηση του παιδιού) θα τοκιστεί για 18 χρόνια και θα γίνει $1000(1+0.05)^{18}$

Το ποσό της 2ης κατάθεσης (πρώτα γενέθλια του παιδιού) θα τοκιστεί για 17 χρόνια και θα γίνει $1000(1+0.05)^{17}$

Το ποσό της 3ης κατάθεσης (δεύτερα γενέθλια του παιδιού) θα τοκιστεί για 16 χρόνια και θα γίνει $1000(1+0.05)^{16}$

…

Το ποσό της τελευταίας κατάθεσης (17ο έτος του παιδιού) θα τοκιστεί για 1 χρόνο και θα γίνει $1000(1+0.05)$

Τελικά λοιπόν το συνολικό ποσό στο τέλος του 18^{ου} έτους είναι:

$$1000(1+0.05)^{18}+1000(1+0.05)^{17}+$$

$$1000(1+0.05)^{16}+\ldots+1000(1+0.05)=$$

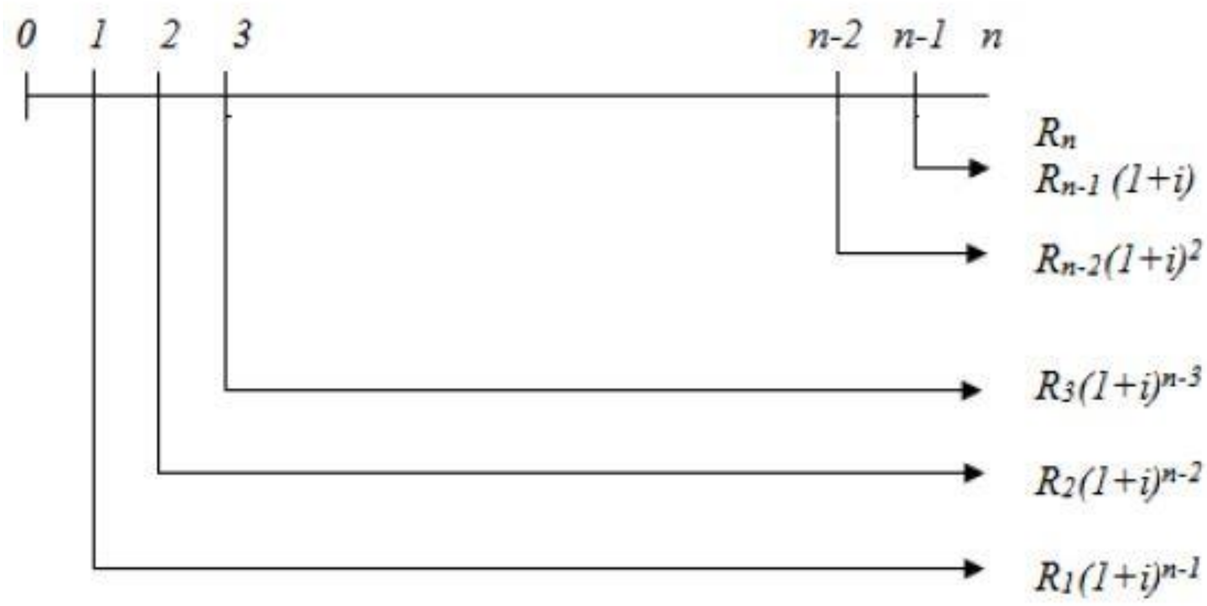
$$=1000(1+0.05)\left[(1+0.05)^{17}+(1+0.05)^{16}+(1+0.05)^{15}+\cdots+1\right]=$$

$$=1000(1+0.05)\frac{(1+0.05)^{18}-1}{0.05}=29539$$

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

- n πλήθος όρων
- Ληξιπρόθεσμη ράντα άρα ό όρος καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου



Τελική αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας δίνεται από τη σχέση:

$$S_{n|i} = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \cdots + R_{n-2}(1+i)^2 + R_{n-1}(1+i) + R_n$$

ή

$$S_{n|i} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k}$$

Τελική Αξία Μοναδιαίας Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$$R_1 = R_2 = R_3 = \cdots = R_n = R = 1$$

$$s_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας με σταθερό όρο R

$$R_1 = R_2 = R_3 = \cdots = R_n = R$$

$$S_{n|i} = R\left((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) + 1\right)$$

Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

$$\boldsymbol{s}_{n|i} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n+1-k} = (1+i)\mathrm{S}_{n|i}$$

- Ίση με την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη ράντα επί (1+i)

Εφαρμογές

1. Ποιά είναι η τελική αξία σταθερής ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων με όρο €500 και επιτόκιο 7%.

$$S_{10|i} = 500\Big((1+0.07)^{10-1} + (1+0.07)^{10-2} + \cdots$$
$$+ (1+0.07)^2 + (1+0.07) + 1\Big) =$$
$$= 500\,\frac{1.07^{10} - 1}{0.07} = 6908.2$$

2. Ποια θα ήταν η τελική αξία της προηγούμενης ράντας αν είχε 20 όρους;

$$S_{20|i} = 500\frac{1.07^{20} - 1}{0.07} = 20495$$

3. Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέτει κάποιος στην τράπεζα στην αρχή κάθε έτους έτσι ώστε σε 25 έτη να εισπράξει το ποσό των €50.000 ένα χρόνο μετά την τελευταία κατάθεση. Το επιτόκιο είναι 5%.

Έχουμε προκαταβλητέα ράντα άρα θα γίνουν 25 καταθέσεις και θα εισπραχθεί το συσσωρευμένο ποσό ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση. Συνεπώς έχουμε προκαταβλητέα ράντα 25 όρων. Η τελική αξία της είναι ίση με την τελική αξία της αντίστοιχης μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας πολλαπλασιασμένη με 1+i=1+0.05=1.05

Η τελική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας 25 όρων είναι

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{(1+0.05)^{25}-1}{0.05}=47.7271$$

Άρα η προκαταβλητέα μοναδιαία ράντα είναι

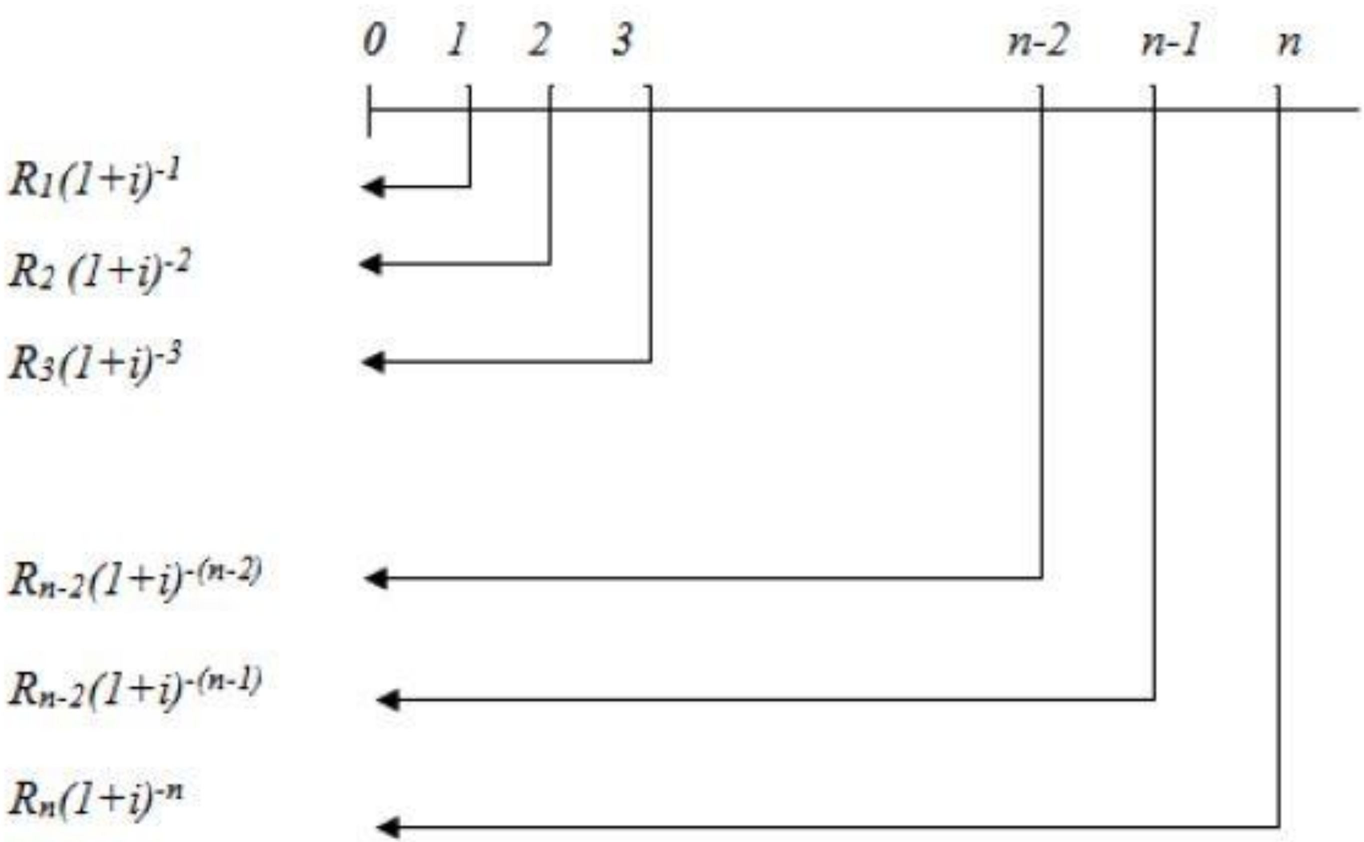
$$(1+i)\times 47.7271=1.05\times 47.7271=50{,}1135$$

Άρα τελικά ο όρος πρέπει να είναι

$$R=\frac{50000}{50.1135}=997.74$$

Αρχική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Υπολογίζουμε την αξία κάθε όρου στην αρχή της ράντας



Άρα

$$A_{n|i} = R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + R_3(1+i)^{-3} + \cdots + R_n(1+i)^{-n} =$$

$$\frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n} =$$

$$\frac{1}{(1+i)^n}\left(R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + R_3(1+i)^{n-3} + \cdots + R_n\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n} S_{n|i}$$

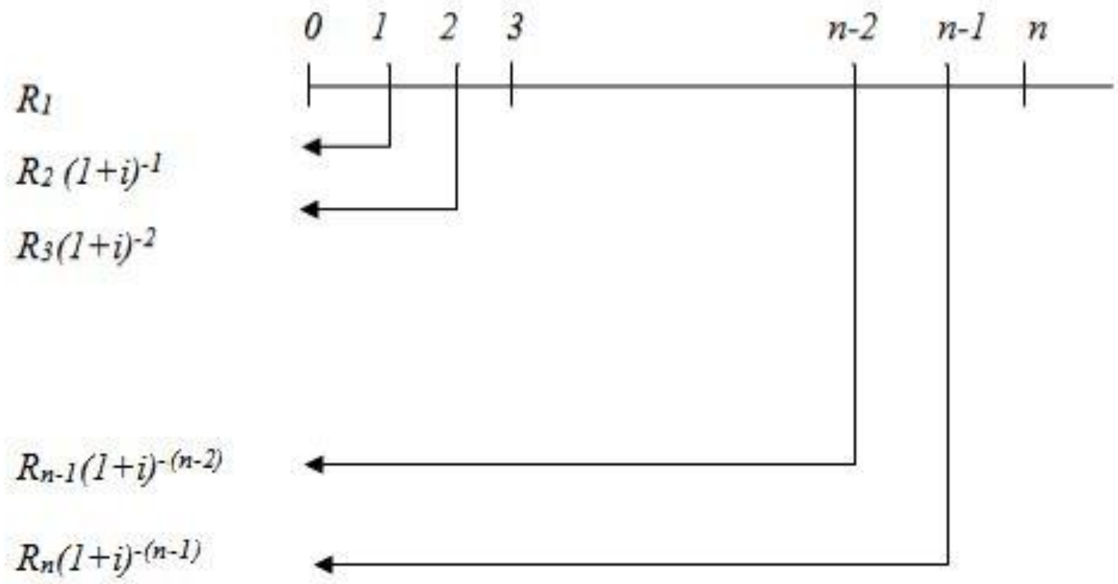
ή

$$S_{n|i} = (1+i)^n A_{n|i}$$

Αρχική Αξία Μοναδιαίας Ληξιπρόθεσμης Ράντας n όρων

$$a_{n|i} = \frac{1}{(1+i)^n} s_{n|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας



$$R_1 + R_2(1+i)^{-1} + R_3(1+i)^{-3} + \cdots + R_n(1+i)^{-(n-1)} =$$

$$= R_1 + \frac{R_2}{1+i} + \frac{R_3}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^n}\left(R_1(1+i)^n + R_2(1+i)^{n-1} + R_3(1+i)^{n-2} + \cdots + R_n(1+i)\right)$$

Εφαρμογή

Ένας παππούς ρωτάει τον εγγονό του που αρχίζει τις σπουδές του αν προτιμά να του δώσει την 1η Οκτωβρίου €14.000 ή να του καταθέτει €800 κάθε τρίμηνο από την 1η Οκτωβρίου για πέντε έτη. Υποθέτουμε τριμηνιαίο επιτόκιο 1%. Τι είναι καλύτερο για τον εγγονό;

Λύση

Θα γίνουν 4 καταθέσεις κάθε χρόνο άρα συνολικά 20 καταθέσεις. Δηλαδή έχουμε προκαταβλητέα ράντα 20 όρων και μας ενδιαφέρει να βρούμε την αρχική αξία της για να συγκρίνουμε με το ποσό των €14.000.

$$V = (1+i)A_{n|i} = (1+i)R\frac{1}{(1+i)^n}s_{n|i} =$$

$$= R\frac{1}{(1+i)^{n-1}}s_{n|i} =$$

$$= 800\frac{1}{(1+0.01)^{20-1}}s_{20|0.01} =$$

$$= 800\frac{1}{1.2081}22.019 = 14581$$

Άρα η δεύτερη επιλογή είναι προτιμότερη για τον εγγονό.

Βιβλιογραφία

- Οικονομικά Μαθηματικά, Μονοβασίλης Θ., Καλογηράτου Ζ., ΣΕΑΒ
- Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης, Μασούρος Χ., Τσίτουρας Χ., Εκδόσεις Τσότρας

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας