ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προεξόφληση στον Ανατοκισμό

- Χρησιμοποιούμε αποκλειστικά την εσωτερική προεξόφληση, αντίθετα από την προεξόφληση στον απλό τόκο όπου έχουμε εσωτερική και εξωτερική προεξόφληση και συνήθως χρησιμοποιούμε την εξωτερική προεξόφληση.
- Όπως και στον απλό τόκο έχουμε ονομαστική αξία K_n, παρούσα αξία K_0 και προεξόφλημα $\mathrm{E} = \mathrm{K}_n - \mathrm{K}_0$.
- Προεξόφληση στον ανατοκισμό χρησιμοποιούμε όταν ο χρόνος προεξόφλησης είναι μεγάλος (μεγαλύτερος του ενός έτους).

Προεξόφλημα ως συνάρτηση της Παρούσας Αξίας

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow$$

$$E = K_0(1+i)^n - K_0 \Rightarrow$$

$$E = K_0[(1+i)^n - 1]$$

Προεξόφλημα ως συνάρτηση της Ονομαστικής Αξίας

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow$$

$$E = K_n - \frac{K_n}{(1+i)^n} \Rightarrow$$

$$E = K_n[1 - \frac{1}{(1+i)^n}] \Rightarrow$$

$$E = K_n[1 - Y^n]$$

Εφαρμογή

Επιταγή ονομαστικής αξίας 6.000 EUR που λήγει μετά από 6 έτη, προεξοφλείται εσωτερικώς σήμερα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθούν η παρούσα αξία και το προεξόφλημα.

Λύση

Έχουμε $K_n = 6000, i = 0.08, n = 6$

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow E = K_n - \frac{K_n}{(1+i)^n} \Rightarrow$$

$$E = K_n[1 - \frac{1}{(1+i)^n}] \Rightarrow E = 6000[1 - \frac{1}{(1+0.08)^6}] \Rightarrow$$

$$E = 6000\left[1 - \frac{1}{1.5869}\right] \Rightarrow E = 6000 \times 0.3698 \Rightarrow$$

$$E = 2218.8$$

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow K_0 = K_n - E \Rightarrow K_0 = 6000 - 2218.8$$
$$= 3781.2$$

Ασκήσεις

1. Ένας έμπορος προεξόφλησε σήμερα στην τράπεζα ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 1.500€ που λήγει μετά από 1,5 έτος. Κατά την προεξόφληση η τράπεζα εφάρμοσε ετήσιο ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 8%. Να υπολογιστεί το ποσό που παρακράτησε η τράπεζα καθώς και το ποσό που είσπραξε ο έμπορος.

Λύση

Έχουμε $K_n = 1500, n = 1.5, i = 0.08$

$$E = K_n\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] \Rightarrow E = 1500[1 - \frac{1}{(1+0.08)^{1.5}}]$$

$\Rightarrow E = 163.54$, το ποσό που εισέπραξε η τράπεζα

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow K_0 = K_n - E \Rightarrow K_0 = 1500 - 163.54$$

$= 1336.46$, το ποσό που εισέπραξε ο έμπορος

2. Ένας έμπορος προεξόφλησε σήμερα στην τράπεζα ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 2.500€ που λήγει μετά από 3 χρόνια. Κατά την προεξόφληση η τράπεζα εφάρμοσε εξαμηνιαίο ανατοκισμό με επιτόκιο 8%. Να υπολογιστεί το ποσό που παρακράτησε η τράπεζα καθώς και το ποσό που είσπραξε ο έμπορος.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του προεξοφλήματος με επιτόκιο όμως που έχει αναχθεί σε έτος σύμφωνα με τον τύπο: $i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 = (1+0.08)^{\frac{6}{12}} - 1 = 0.0392$

$$E = K_n \left[1 - \frac{1}{(1+i')^{\lambda n}} \right] \Rightarrow$$

$E = 2500 \left[1 - \frac{1}{(1+0.0392)^{2\times 3}} \right] = 515.07$, το ποσό που παρακράτησε η τράπεζα

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow K_0 = K_n - E \Rightarrow K_0 = 2500 - 515.07 = 1984.93$$

το ποσό που εισέπραξε ο έμπορος

3. Ένας έμπορος εξέδωσε στις 20/5 σε πελάτη του ένα γραμμάτιο ονομαστική αξίας 1.500€. Σκοπεύει να το προεξοφλήσει άμεσα σε τράπεζα, η οποία εφαρμόζει ετήσιο ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 8%, και να εισπράξει 1.450€. Ποια ημερομηνία λήξης θα έχει το γραμμάτιο;

Λύση

$$E = K_n - K_0 = 1500 - 1450 = 50$$

$$E = K_n\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right] \Rightarrow 50 = 1500[1 - \frac{1}{(1+0.08)^n}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{1500} = 1 - \frac{1}{1.08^n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1.08^n} = 1 - 0.0333 \Leftrightarrow$$

$$1.08^{-n} = 0.9667 \Leftrightarrow$$

$$log1.08^{-n} = log0.9667 \Leftrightarrow$$

$$-nlog1.08 = log0.9667 \Leftrightarrow$$

$$-n = \frac{log0.9667}{log1.08} \Leftrightarrow$$

$$-n = -0.4405 \Leftrightarrow$$

$n = 0.4405$ έτη ή $n = 0.4405 \times 360 = 159$ ημέρες

Μήνες	5	6	7	8	9	10	Σύνολο
Ημέρες	30-19=11	30	30	30	30	28	159

Άρα η ζητούμενη ημερομηνία είναι 28/10

4. Επιταγή ονομαστικής αξίας €5.500 προεξοφλείται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%, 4 χρόνια και 8 μήνες πριν τη λήξη της. Να βρεθεί η παρούσα αξία και το προεξόφλημα.

Λύση

Έχουμε $K_n = 5500, i = 0.04$ και

$n \rightarrow$ 4 χρόνια και 8 μήνες δηλαδή 9 εξάμηνα και 2 μήνες

άρα

$$K_n = K_0(1+i)^n(1+i)^{\mu/6} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n(1+i)^{\mu/6}} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{5500}{(1+0.04)^9(1+0.04)^{2/6}} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{5500}{1.04^9 1.04^{1/3}} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{5500}{1.04^9 1.04^{1/3}} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{5500}{1.4233 \times 1.01316} \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{5500}{1.44203} \Leftrightarrow$$

$\mathrm{K}_0 = 3814.068$

οπότε έχουμε

$E = K_n - K_0 = 5500 - 3814.068 = 1685.932$

5. Ένας έμπορος πώλησε σήμερα με πίστωση σε ένα πελάτη του εμπόρευμα και έκδωσε συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 600€ με λήξη μετά από 1 χρόνο και 2 μήνες. Με δεδομένο ότι ο έμπορος σκοπεύει σήμερα να προεξοφλήσει την συναλλαγματική στην τράπεζα, ζητείται να υπολογισθεί το ποσό που θα εισπράξει λαμβάνοντας υπόψη ότι τράπεζα εφαρμόζει εξαμηνιαίο ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 8%.

Λύση

Αρχικά προσαρμόζουμε το ετήσιο επιτόκιο σε εξαμηνιαίο με τη χρήση του σχετικού τύπου:

$$i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 = (1+0.08)^{\frac{6}{12}} - 1 = 0.0392$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε το χρονικό διάστημα σε εξάμηνα, άρα έχουμε 1 χρόνος και 2 μήνες ισούται με 2 εξάμηνα και 2/6=0.33 εξάμηνα, άρα συνολικά 2.33 εξάμηνα.

Οπότε τελικά έχουμε:

$$E = K_{n+\frac{\mu}{\lambda}}\left[1-(1+i')^{-\left(n+\frac{\mu}{\lambda}\right)}\right] =$$

$$= 600[1-(1+0.0392)^{-2.33}] =$$

$600[1 - 0.9145] = 51.52$

άρα η τράπεζα λαμβάνει 51.52 ενώ ο έμπορος λαμβάνει

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow K_0 = K_n - E \Rightarrow K_0 = 600 - 51.52 = 548.48$$

Βιβλιογραφία

- Οικονομικά Μαθηματικά, Μονοβασίλης Θ., Καλογηράτου Ζ., ΣΕΑΒ
- Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης, Μασούρος Χ., Τσίτουρας Χ., Εκδόσεις Τσότρας

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας