

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών



ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ/ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Μέθοδος Παρεμβολής

Χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την εκθετική μέθοδο όταν ο χρόνος ή το επιτόκιο δεν είναι ακέραιος αριθμός (άρα δεν υπάρχει στους οικονομικούς πίνακες). Χρησιμοποιεί τις δύο πλησιέστερες τιμές στη ζητούμενη τιμή και με βάση αυτές γίνεται μια εκτίμησή της, δηλαδή χρησιμοποιούμε τις τιμές εκατέρωθεν της ζητούμενης τιμής για να την προσεγγίσουμε.



Παράδειγμα

Καταθέτουμε €1.000 για 3 χρόνια, 4 μήνες και 12 μέρες με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση

Έχουμε $K_0 = 1000$ και $i = 0.06$

Συντελεστής κεφαλαιοποίησης $(1 + i)^n$ μπορεί να βρεθεί από τους οικονομικούς πίνακες για έτη ή μήνες, όχι όμως για ημέρες, οπότε πρέπει να μετατρέψουμε τις ημέρες σε μήνες.



Ένας μήνας αντιστοιχεί σε 30 ημέρες
X μήνες αντιστοιχούν σε 12 ημέρες

Άρα $X=12/30=0.4$ μήνες και τελικά έχουμε 3 χρόνια και 4.4 μήνες

Άρα η τελική αξία του κεφαλαίου είναι

$$\begin{aligned}K_{n+\frac{\mu}{12}} &= K_0(1+i)^n(1+i)^{\frac{\mu}{12}} = \\ &= 1000 \times 1.06^3 \times 1.06^{\frac{4.4}{12}} = \\ &= 1000 \times 1.191 \times 1.06^{\frac{4.4}{12}}\end{aligned}$$

Η δύναμη $1.06^{\frac{4.4}{12}}$ δεν υπάρχει στους πίνακες οπότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της παρεμβολής. Βρίσκουμε τις δύο τιμές εκατέρωθεν της ζητούμενης, δηλαδή τις δυνάμεις με εκθέτη 4 και 5 και η τιμή για 4.4 βρίσκεται στο ενδιάμεσο.



Οπότε έχουμε

$$1.06^{4/12} = 1.0196$$

$$1.06^{5/12} = 1.0246$$

Επομένως για διαφορά ενός μήνα (από 4° σε 5°) η διαφορά στην τιμή είναι 0.005 (1.0246-1.0196).

Για διαφορά 0.4 (από 4° σε 4.4°) η διαφορά στην τιμή είναι X.

$$X = 0.005 \times 0.4 / 1 = 0.002$$

Άρα η αύξηση της τιμής για το 0.4 του μήνα είναι 0.002, οπότε έχουμε $1.06^{4.4/12} = 1.0196 + 0.002 = 1.0216$ και τελικά έχουμε

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = 1191 \times 1.0216 = 1216.73$$



$(1+i)^n$	Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από n περιόδους ανατοκισμού					
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
1	1,0100000	1,0200000	1,0300000	1,0400000	1,0500000	1,0600000
2	1,0201000	1,0404000	1,0609000	1,0816000	1,1025000	1,1236000
3	1,0303010	1,0612080	1,0927270	1,1248640	1,1576250	1,1910160
4	1,0406040	1,0824322	1,1255088	1,1698586	1,2155063	1,2624770
5	1,0510101	1,1040808	1,1592741	1,2166529	1,2762816	1,3382256
6	1,0615202	1,1261624	1,1940523	1,2653190	1,3400956	1,4185191
7	1,0721354	1,1486857	1,2298739	1,3159318	1,4071004	1,5036303
8	1,0828567	1,1716594	1,2667701	1,3685691	1,4774554	1,5938481
9	1,0936853	1,1950926	1,3047732	1,4233118	1,5513282	1,6894790
10	1,1046221	1,2189944	1,3439164	1,4802443	1,6288946	1,7908477



Εύρεση του τόκου που αντιστοιχεί στη n-ιοστη περίοδο

Αρκεί να βρούμε τον τόκο που σωρεύτηκε μέχρι και τη n-ιοστη περίοδο, τον τόκο που σωρεύτηκε μέχρι και τη n-1 περίοδο και να αφαιρέσουμε τους δύο τόκους. Άρα θα έχουμε $E_n = K_n - K_{n-1} = K_0 \times (1 + i)^{n-1} \times i$

Παράδειγμα

Κεφάλαιο €5.000 κατατίθεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθούν οι τόκοι θα πάρουμε κατά τη διάρκεια του 8ου έτους.



Λύση

$$E_n = K_n - K_{n-1} = K_0 \times (1 + i)^{n-1} \times i$$

$$\text{Άρα } E_8 = 5000 \times (1 + 0.08)^{8-1} \times 0.08 = 685.52$$

Εύρεση αρχικού κεφαλαίου

Για να βρούμε την αρχική αξία αρκεί να επιλύσουμε το βασικό τύπο ως εξής:

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n \Leftrightarrow K_0 = K_n \times \frac{1}{(1+i)^n}$$

Ο όρος $\frac{1}{(1+i)^n}$ (αντίστροφος του συντελεστή κεφαλαιοποίησης) λέγεται συντελεστής προεξόφλησης.



Παράδειγμα

Καταθέσαμε κεφάλαιο με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Μετά από 4 χρόνια και 6 μήνες πήραμε συνολικά €42.699. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης.

Λύση

$$n = 4 \times 2 + 1 = 9$$

$$K_0 = K_n \times \frac{1}{(1+i)^n} \Leftrightarrow K_0 = K_9 \times \frac{1}{(1+0.04)^9} = 42699 \times \frac{1}{(1+0.04)^9} = 30000$$



Εύρεση του χρόνου ανατοκισμού

Για να βρούμε το χρόνο ανατοκισμού επιλύουμε το βασικό τύπο του τόκου ως προς το συντελεστή κεφαλαιοποίησης και στη συνέχεια επιλύουμε ως προς το χρόνο με χρήση λογαρίθμων.

Παράδειγμα

Καταθέτουμε κεφάλαιο €4.500 με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%, το οποίο γίνεται μαζί με τους τόκους του €6.229. Να βρεθεί ο χρόνος της κατάθεσης.

Λύση

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n \Leftrightarrow (1 + i)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$\Leftrightarrow \log(1 + i)^n = \log \frac{K_n}{K_0} \Leftrightarrow n \log(1 + i) = \log K_n - \log K_0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log(1 + i)}$$



$$\Leftrightarrow n = \frac{\log 6229 - \log 4500}{\log(1+0.03)} \approx 11 \text{ περιόδους}$$

άρα 11 εξάμηνα δηλαδή 5 έτη και 6 μήνες.

Εύρεση επιτοκίου

Η εύρεση του επιτοκίου στον ανατοκισμό γίνεται με τρόπο ανάλογο με αυτόν της εύρεσης χρόνου, δηλαδή επιλύουμε ως προς το συντελεστή κεφαλαιοποίησης και στη συνέχεια είτε χρησιμοποιούμε ρίζες είτε ανατρέχουμε στους οικονομικούς πίνακες στη γραμμή του χρόνου n . Αν η τιμή δεν αντιστοιχεί σε κάποιο από τα επιτόκια εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο τοκίστηκε κεφάλαιο €6.000 και μετά από περίοδο 5 χρόνων έγινε μαζί με τους τόκους του €9.663,06.



Λύση

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n \Leftrightarrow (1 + i)^n = \frac{K_n}{K_0} \Leftrightarrow 1 + i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \Leftrightarrow$$

$$1 + i = \sqrt[5]{\frac{9663.06}{6000}} \Leftrightarrow i = 0.1 \text{ \acute{a}\rho\alpha } i = 10\%$$



Ασκήσεις

1. Τοποθετούμε κεφάλαιο €10.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8,3% για 5 χρόνια 4 μήνες και 18 μέρες. Να βρεθεί το ποσό που θα πάρουμε μετά το τέλος του ανατοκισμού.
2. Κεφάλαιο κατατίθεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 7 χρόνια. Για όλη τη διάρκεια τοκισμού πήραμε τόκο ίσο με € 1.070,70. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο τοκισμού.
3. Κεφάλαιο κατατίθεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 7 χρόνια. Για όλη τη διάρκεια τοκισμού πήραμε τόκο ίσο με € 1.070,70. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο τοκισμού.
4. Καταθέτουμε €5.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Στο τέλος της κατάθεσης παίρνουμε €6.500. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα της κατάθεσης.
5. Μετά από πόσο χρόνο κεφάλαιο που τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% τριπλασιάζεται;
6. Κεφάλαιο €10.000 τοκίζεται για 7 χρόνια και γίνεται μαζί με τους τόκους του €17.700. Αν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό να βρεθεί το αντίστοιχο επιτόκιο με το οποίο έγινε η κατάθεση.



Βιβλιογραφία

- Οικονομικά Μαθηματικά, Μονοβασίλης Θ., Καλογηράτου Ζ., ΣΕΑΒ
- Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης, Μασούρος Χ., Τσίτουρας Χ., Εκδόσεις Τσότρας



Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

