ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Τμήμα Διοίκησης Συστημάτων Εφοδιασμού
Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πιθανότητες

Η έννοια της Δεσμευμένης Πιθανότητας

Εισαγωγικά στοιχεία

Τυχαίο πείραμα λέγεται ένα πείραμα του οποίου τα αποτελέσματα δε μπορεί να προβλεφτεί με ακρίβεια.

Απλό ενδεχόμενο λέγεται ένα οποιοδήποτε αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος.

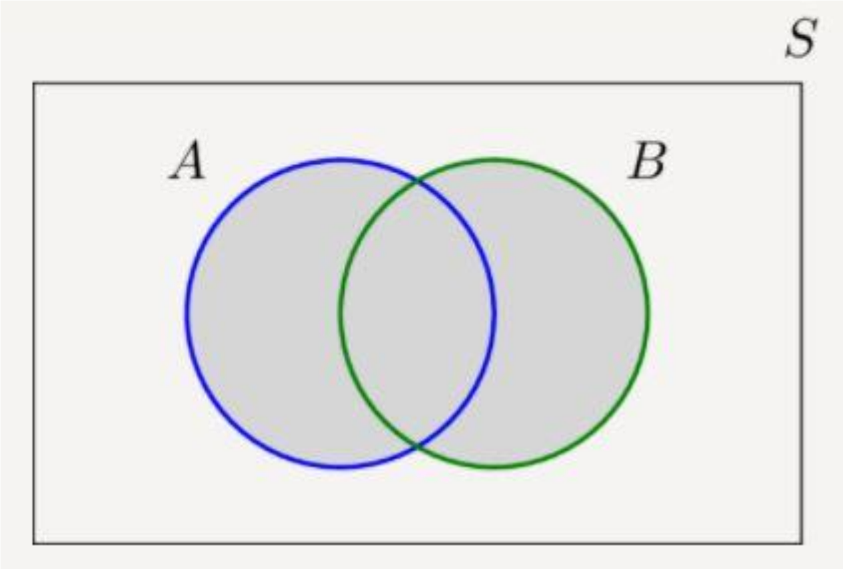
Σύνθετο ενδεχόμενο λέγεται ένα σύνολο από περισσότερα του ενός αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος.

Δειγματικός χώρος ή βέβαιο ενδεχόμενο λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος. Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου ονομάζεται ενδεχόμενο.

Πράξεις με ενδεχόμενα

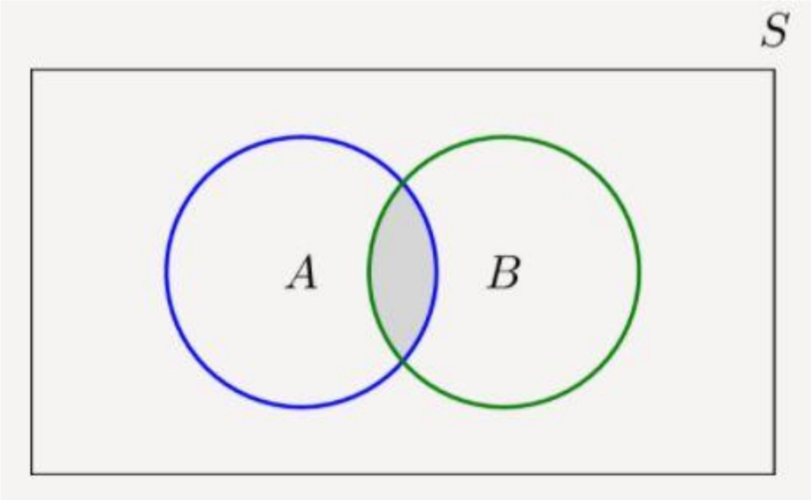
Ένωση δύο ενδεχομένων

$$A \cup B$$

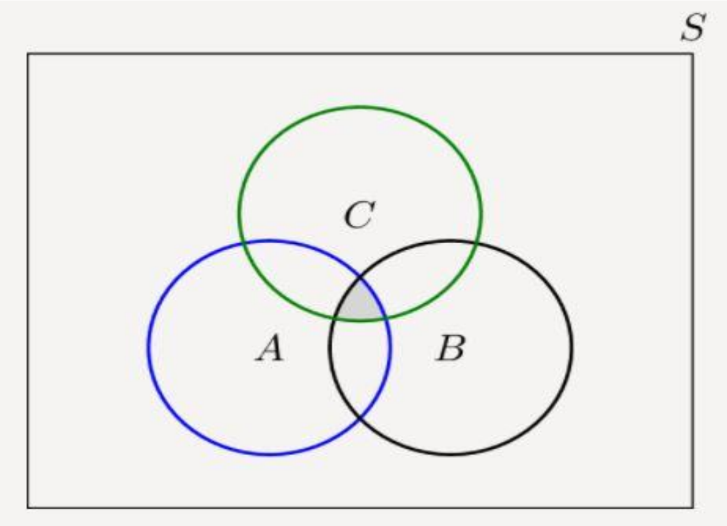


Τομή δύο ενδεχομένων

A ∩ B

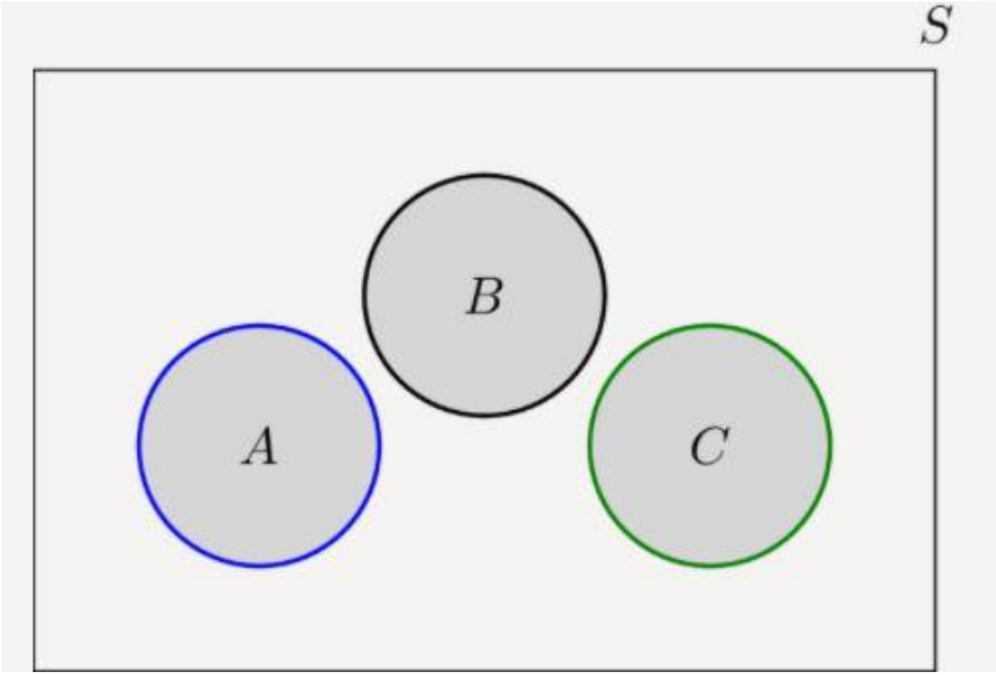


A ∩ B ∩ C



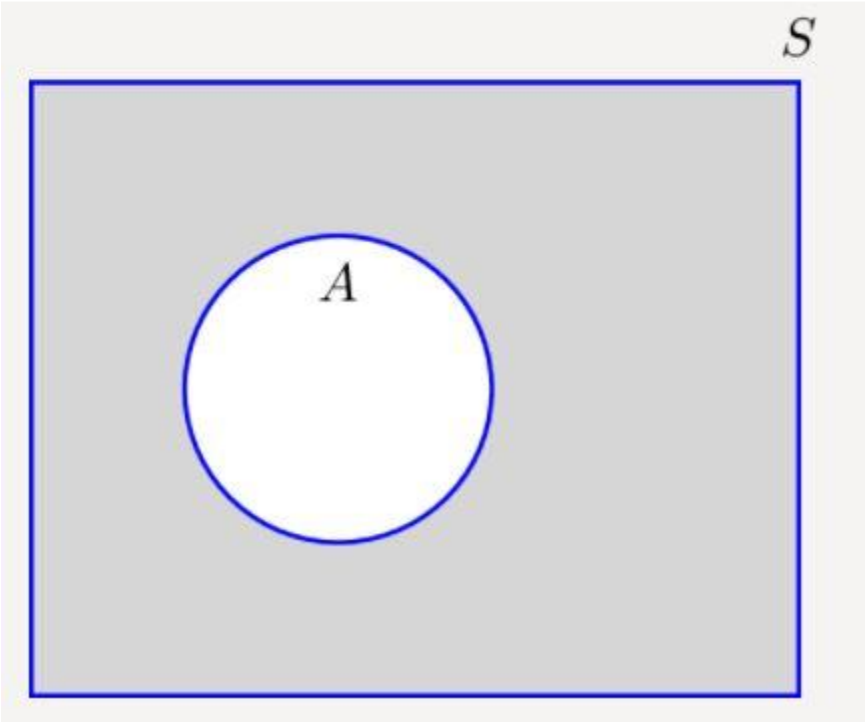
Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

$A \cap B \cap C = \emptyset$



Συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου

A'



Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

για ασυμβίβαστα και ισοπίθανα ενδεχόμενα

$$P(A) = \frac{N(E)}{N(S)}$$

$N(E)$: το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων

$N(S)$: το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και A ένα ενδεχόμενο με πιθανότητα $P(A)$ τότε:

1. $1 \geq P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. $P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) =$
   $= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Βασική Πολλαπλασιαστική Αρχή

Αν ένα πείραμα πραγματοποιείται σε δύο διαδοχικά στάδια, με n_1 πιθανά αποτελέσματα για το πρώτο στάδιο και n_2 για το δεύτερο, τότε τα συνολικά δυνατά αποτελέσματα είναι $n_1 \times n_2$.

Παράδειγμα: Ταξίδι Κρήτη προς Καβάλα, περιλαμβάνει τις μεταφορές Κρήτη -> Αθήνα και Αθήνα -> Καβάλα, η πρώτη μεταφορά μπορεί να γίνει είτε με πλοίο είτε με αεροπλάνο, ενώ η δεύτερη μπορεί να γίνει είτε με αυτοκίνητο είτε με τρένο είτε με λεωφορείο είτε με αεροπλάνο.

Επομένως το ταξίδι Κρήτη προς Καβάλα μπορεί να γίνει με $2 \times 4 = 8$ τρόπους.

Παραγοντικό $n!$

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Ιδιότητες Παραγοντικών

$$1! = 1$$
$$0! = 1$$
$$n! = (n-1)! \times n$$
$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$
$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$
$$\frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Μεταθέσεις

Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν n στοιχεία.

$$P_n = n!$$

Διατάξεις n στοιχείων ανά x

Είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί κάποιος να διαλέξει x στοιχεία από τα n ενός συνόλου, όταν η σειρά επιλογής έχει σημασία.

$$P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Συνδυασμοί των n στοιχείων ανά x

Είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί κάποιος να διαλέξει x από τα n στοιχεία του συνόλου, όταν η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία.

$$C(n, x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Θεωρήματα

1. Για τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α’ ισχύει

$$P(A') = 1 - P(A)$$

2. $P(\emptyset) = 0$

3. $P(A) \leq 1$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Για ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

6. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

7. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ισχύει

$$\begin{aligned} &P(A \cup B \cup \Gamma) = \\ &\qquad = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) \\ &\qquad - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \end{aligned}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Έστω δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου και P(B)>0, τότε η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α δεδομένου ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο Β ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του Α δεδομένου του Β, συμβολίζεται με P(A|B) και υπολογίζεται ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Αντίστοιχα για P(A)>0 ισχύει:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Πολλαπλασιαστικός Νόμος Πιθανοτήτων

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα Α, Β και Γ (η πραγματοποίηση του Β δεν επηρεάζεται από την πιθανότητα πραγματοποίησης του Α, κτλ) με Ρ(Α)>0, Ρ(Β)>0 και Ρ(Γ)>0 ισχύουν:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

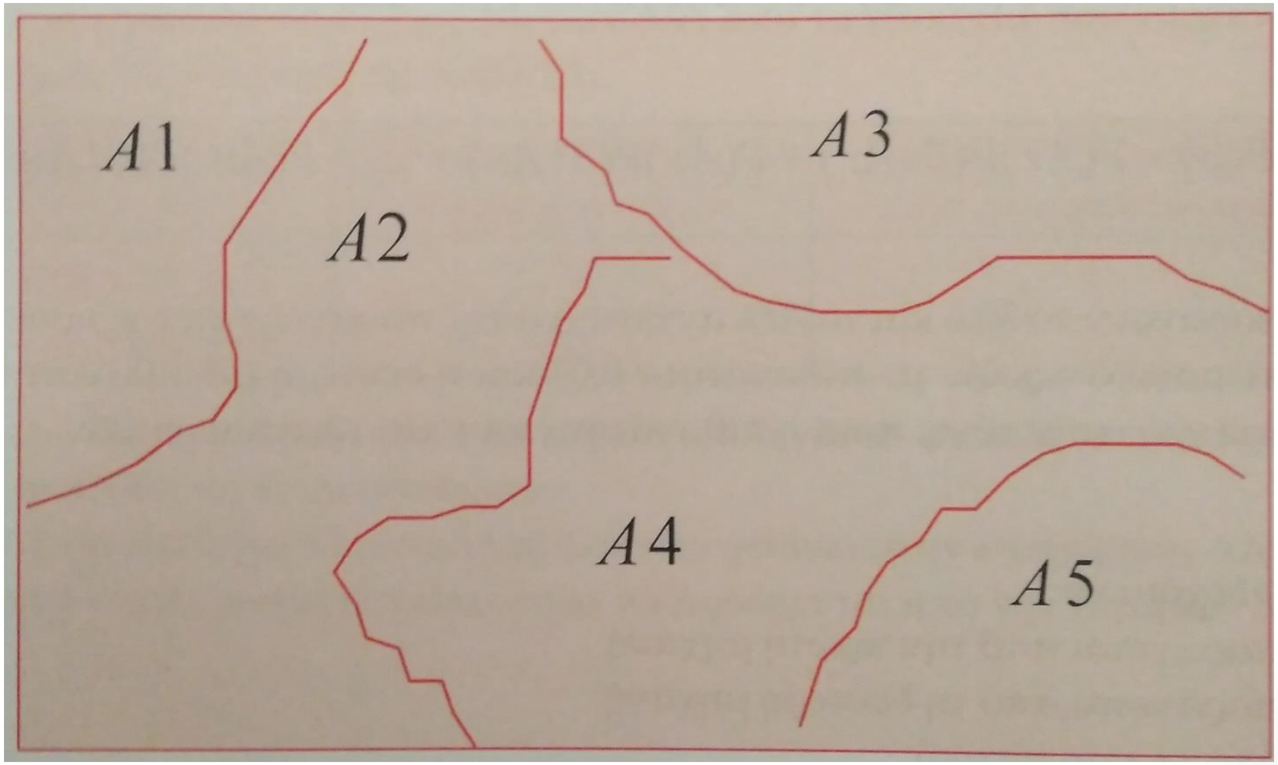
$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \times P(B) \times P(\Gamma)$$

Η έννοια της Διαμέρισης

Ως Διαμέριση ενός δειγματικού χώρου S ορίζεται μια συλλογή $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχομένων του S τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα και η ένωσή τους είναι ο S, δηλαδή ισχύουν: $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\, i, j = 1,2, \ldots, n, i \neq j$

και $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$



Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, …, A_n αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) > 0, \forall\, i = 1,2,\ldots,n$ τότε για κάθε ενδεχόμενο B με P(B)>0 ισχύει:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$$

Θεώρημα Bayes

Αν τα ενδεχόμενα A_1, A_2, …, A_n αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S τέτοια ώστε $P(A_i) > 0, \forall\, i = 1,2,\dots,n$ τότε για κάθε ενδεχόμενο B με P(B)>0 ισχύει:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|\,A_i)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)}$$

Παράδειγμα:

Το δημοτικό συμβούλιο ενός Δήμου Ζ εξετάζει την πιθανότητα τροποποίησης χρήσης γης από αμιγούς κατοικίας σε εμπορικού κέντρου. Σε περίπτωση που κατασκευαστεί εμπορικό κέντρο πολλές μικρές επιχειρήσεις της περιοχής θα αναγκαστούν να μετεγκατασταθούν στο συγκεκριμένο εμπορικό κέντρο, με υψηλό επιπρόσθετο πάγιο κόστος. Οι επιχειρήσεις αυτές εκτιμούν υποκειμενικά ότι η πιθανότητα έγκρισης τροποποίησης γης είναι 0,8 ενώ η πιθανότητα απόρριψης είναι 0,2. Γνωρίζουμε επίσης ότι για να δοθεί η άδεια κατασκευής του εμπορικού κέντρου θα πρέπει να εγκριθεί από το δημοτικό συμβούλιο η αλλαγή χρήσης γης, οπότε και απαιτείται η σχετική γνωμοδότηση της Επιτροπής Ποιότητας Ζωής. Βάσει εμπειρίας του παρελθόντος είναι γνωστά τα ακόλουθα:

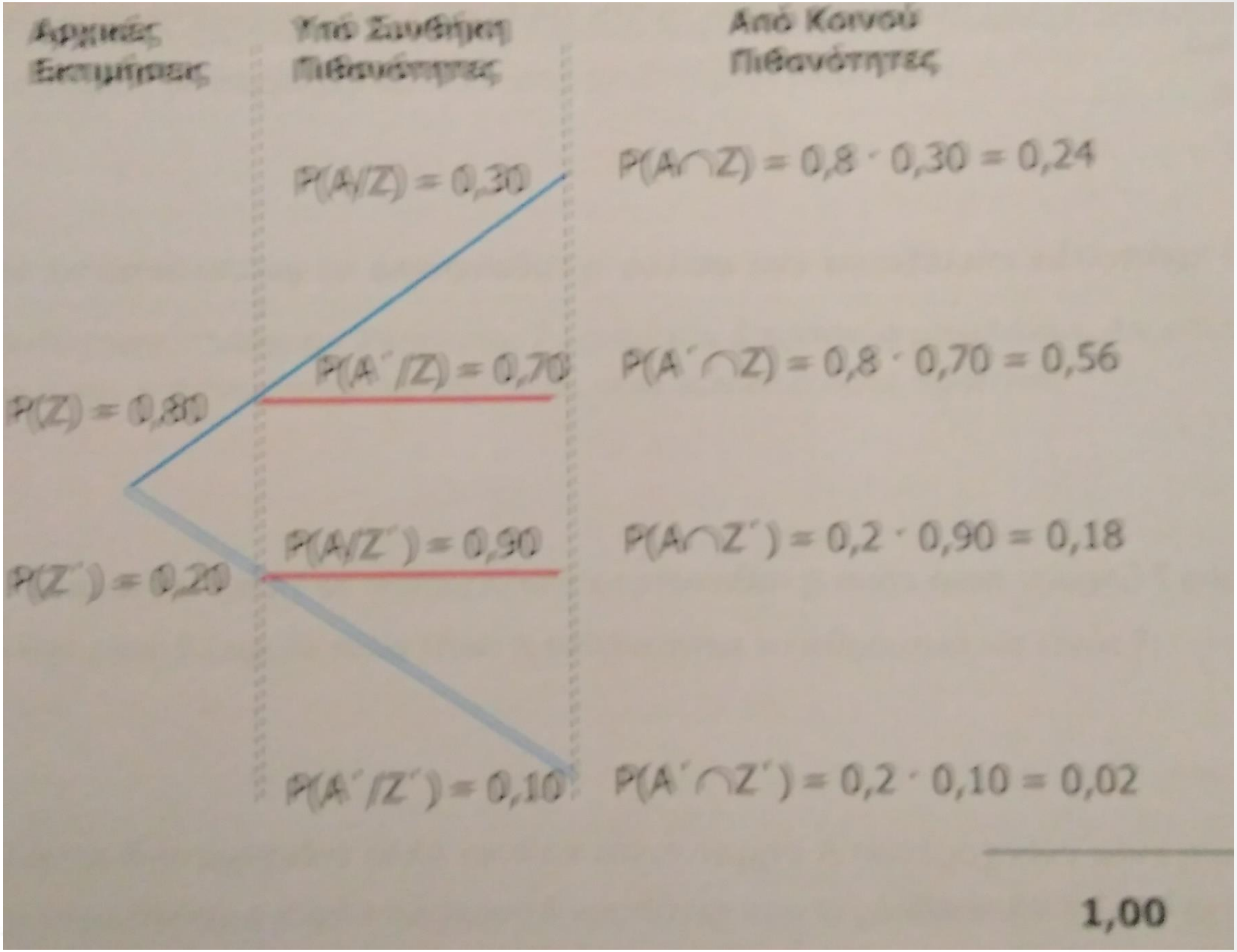
P(A|Z)=P(αρνητική εισήγηση|έγκριση τροποίησης)=0,3

P(A|Z’)= P(αρνητική εισήγηση|απόρριψη τροποίησης)=0,9

P(A’|Z)= P(θετική εισήγηση|έγκριση τροποίησης)=0,7

P(A’|Z’)= P(θετική εισήγηση|απόρριψη τροποίησης)=0,1

Να βρεθεί η πιθανότητα έγκρισης της κατασκευής του εμπορικού κέντρου, δεδομένης μιας αρνητικής εισήγησης της επιτροπής.



Αρχικές Εκτιμήσεις
Υπό Συνθήκη Πιθανότητες
Από Κοινού Πιθανότητες
$P(A/Z) = 0{,}30$
$P(A \cap Z) = 0{,}8 \cdot 0{,}30 = 0{,}24$
$P(A'/Z) = 0{,}70$
$P(A' \cap Z) = 0{,}8 \cdot 0{,}70 = 0{,}56$
$P(Z) = 0{,}80$
$P(A/Z') = 0{,}90$
$P(A \cap Z') = 0{,}2 \cdot 0{,}90 = 0{,}18$
$P(Z') = 0{,}20$
$P(A'/Z') = 0{,}10$
$P(A' \cap Z') = 0{,}2 \cdot 0{,}10 = 0{,}02$
1,00

Ζητάμε το ενδεχόμενο Ζ όταν έχει συμβεί το ενδεχόμενο Α.

Άρα από το Θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(Z|A) = \frac{P(A|Z) \times P(Z)}{P(A|Z) \times P(Z) + P(A|Z') \times P(Z')} =$$

$$= \frac{0,3 \times 0,8}{0,3 \times 0,8 + 0,9 \times 0,2} = 0,57$$

Ενδεικτική Βιβλιογραφία:

1. ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ, Παπαδόγγονας, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΟΤΡΑΣ, 2020

Ερωτήσεις ???

Ευχαριστώ για την προσοχή σας